FUNDAÇÃO GETULIO VARGAS

EPGE
Ensaios Econômicos

Nº 215

DETERMINAÇÃO DE PREÇOS DE ATIVOS, ARBITRAGEM, MERCADO A TERMO E MERCADO FUTURO

Flávio Auler

Prof. Sergio Ribeiro da Costa Werlang

Agosto de 1993

ESCOLA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ECONOMIA
DA FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS

PRAIA DE BOTAFOGO, 190 – 10º ANDAR

Nº 215

DETERMINAÇÃO DE PREÇOS DE ATIVOS, ARBITRAGEM, MERCADO A TERMO E MERCADO FUTURO

Flávio Auler

Prof. Sergio Ribeiro da Costa Werlang

Agosto de 1993

DETERMINAÇÃO DE PREÇOS DE ATIVOS, ARBITRAGEM, MERCADO A TERMO E MERCADO FUTURO

FLÁVIO AULER e

SÉRGIO RIBEIRO DA COSTA WERLANG

Agosto, 1993

ÍNDICE

DETERMINAÇÃO DE PREÇOS DE ATIVOS, ARBITRAGEM, MERCADO A TERMO E MERCADO FUTURO

Flávio Auler[1]
Sérgio Ribeiro da Costa Werlang[2]

RESUMO: **O artigo é dividido em duas partes: a primeira tem por fim apresentar um modelo básico de determinação de preços de ativos e definir o que vem a ser uma oportunidade de arbitragem. Na segunda parte é analisado inicialmente o mercado a termo, mostrando como o preço do ativo é determinado neste mercado por arbitragem. Depois é analisado o mercado futuro, mostrando como seu preço é determinado por arbitragem no caso de termos taxa de juros não estocástica, e analisada a relação entre o preço de certo ativo no mercado a termo e no mercado futuro e o papel das expectativas. Finalmente apresentamos um procedimento alternativo para a determinação de preços no mercado futuro, que é o modelo de média-variância.**

[1] *Aluno do Doutorado da EPGE/FGV.*
[2] *Professor da EPGE/FGV.*

I - INTRODUÇÃO[3]

O artigo é dividido em duas partes: a primeira tem por fim apresentar um modelo básico de determinação de preços de ativos e definir o que vem a ser uma oportunidade de arbitragem. Aproveitamos esta parte para definir medida de martingal equivalente, eficiência de Pareto e a lei do preço único nos mercados.

Na segunda parte é analisado inicialmente o mercado a termo, mostrando como o preço do ativo é determinado neste mercado por arbitragem. Como exemplos temos o termo de moeda estangeira com livre movimentação de capitais e o contrato a termo de mercadorias com custo de estocagem. Depois é analisado o mercado futuro, mostrando como seu preço é determinado por arbitragem no caso de termos taxa de juros não estocástica, e analisamos a relação entre o preço de certo ativo no mercado a termo e no mercado futuro e o papel das expectativas. Como exemplo temos o mercado futuro de BTN.

Finalmente apresentamos um procedimento alternativo para a determinação de preços no mercado futuro, que é o modelo de média-variância com o qual podemos operar no mercado futuro mesmo com contratos distantes do vencimento ou com taxas de juros estocásticas. Agora o exemplo é o mercado de índice de ações.

[3] *Os autores agradecem à Luiz Guilherme Schymura de Oliveira e à Marcos de Bustamante Monteiro pelo trabalho de revisão dos originais.*

II - ARBITRAGEM E DETERMINAÇÃO DE PREÇOS DE ATIVOS

II.1 - Introdução

Em uma economia, o risco pode ser introduzido através da descrição de diversos estados da natureza, que são a realização de eventos exógenos que afetam os retornos dos ativos da economia. Os agentes negociam os diversos títulos disponíveis de modo a reduzir o risco inerente à existência dos diversos estados, determinando assim os preços dos ativos.

Uma forma de modelar uma economia com mercados financeiros é supor a existência de indivíduos com certa renda e que devem decidir como reparti-la em consumo presente e diversos ativos, de modo que no futuro os ativos possam ser realizados para se obter renda suficiente para o consumo futuro. A incerteza, caracterizada por uma coleção Ω com elementos ω_S determina os rendimentos dos ativos e, desta forma, afeta o consumo futuro (e possivelmente o consumo presente). Ou seja, o agente tenta transferir renda para o futuro montando uma carteira com os diversos ativos disponíveis, cujo retorno está associado à realização de um estado da natureza.

Suponha agora uma economia com um período, e com o risco representado por um número finito de estados da natureza (S estados) que são verificados apenas no período final. Neste caso, a decisão do indivíduo descrita anteriormente é o resultado da maximização de uma função de utilidade durante a data *0*, determinando-se assim o consumo na data inicial e a demanda pelos N ativos disponíveis (o que, conseqüentemente, determina o consumo na data final).

Seja C_0 o consumo na data *0*, C_{1S} o consumo na data *1*, no estado s, p_j o preço do ativo j na data *0*, n_j quantidade do ativo j comprada, $\tilde{n}_j$ a quantidade do ativo j possuida pelo indivíduo inicialmente (ou seja, os títulos são "exógenos"), y_{js} a realização do ativo j no estado s (que pode ser considerado como um "dividendo" pago ao acionista da empresa j), e_0 a renda recebida na data *0* e $\sum_{j=1}^{N} \tilde{n}_j . p_j$ o valor da carteira possuída pelo indivíduo na data *0*. Conclui-se que a decisão do agente pode ser representada por:

$$\max \sum_{s=1}^{S} \pi_s . u(c_0, c_{1s})$$

sujeito a $c_0 + \sum_{j=1}^{N} n_j . p_j \leq e_0 + \sum_{j=1}^{N} \tilde{n}_j , p_j$

$$c_{1s} \leq \sum_{j=1}^{N} n_j . y_{js} \quad (S \text{ equações})$$

Com as hipóteses usuais sobre a função utilidade as restrições se verificam com o sinal de igualdade.

O resultado da maximização acima é descrito pelas N equações:

$$p_j = \sum_{s=1}^{S} \frac{\pi_s . \frac{\partial u}{\partial c_{1s}}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_s . \frac{\partial u}{\partial c_0}} . y_{js} \qquad j = 1, 2, \ldots, N$$

Suponha agora que o primeiro título seja um ativo sem risco, ou seja, que o seu retorno $\frac{y_{1s}}{p_1}$ independa do estado da natureza e que $y_{1s} > 0$. Então:

$$\sum_{s=1}^{S} \frac{\pi_s . \frac{\partial u}{\partial c_{1s}}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_s . \frac{\partial u}{\partial c_0}} . \frac{y_{1s}}{p_1} = 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, N$$

Podemos definir π_s^* para $s = 1, 2, \ldots,$ S como:

$$\pi_s^* = \frac{\pi_s . \frac{\partial u}{\partial c_{1s}}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_s . \frac{\partial u}{\partial c_0}} . \frac{y_{1s}}{p_1} > 0$$

Com as hipóteses usuais sobre as funções de utilidade dos indivíduos então que $\pi_s^* > 0$ e $\sum_{s=1}^{S} \pi_s^* = 1$, ou seja, π_s^* é uma probabilidade em Ω.

Defina a taxa de retorno sobre o título sem risco como:

$$1 + r = \frac{y_{1s}}{p_1}$$

Então para o título j, sendo $j = 2, 3, \ldots, N$, temos:

$$p_j = \frac{1}{1+r} \cdot \sum_{s=1}^{S} \pi_s^* . y_{js}$$

Logo o preço do título j é igual ao valor esperado relativamente à probabilidade π_s^* do seu pagamento no período final descontado pela taxa de juros r. A esta probabilidade π_s^* damos o nome de medida de martingal equivalente.

Uma oportunidade de arbitragem pode ser descrita como um investimento onde o investidor não aplica dinheiro (o total gasto na compra de alguns ativos iguala o total obtido na venda a descoberto de outros) e no qual o retorno é não negativo, sendo que em pelo menos um dos estados da natureza o retorno é positivo. Evidentemente qualquer investidor racional demandaria uma quantidade infinita deste portfólio nunca se saciando, e conseqüentemente sua utilidade esperada tenderia a infinito.

O resultado acima é óbvio. Suponha por exemplo que exista uma oportunidade de arbitragem, e que a economia esteja em equilíbrio (e portanto todo investidor está maximizando sua utilidade esperada, dada sua restição orçamentária). Se existe uma oportunidade de arbitragem, basta o investidor montar uma carteira com os títulos que compõe a arbitragem, e repetir a operação. Neste caso, o investidor nunca ficaria saciado, comprando cada vez mais, e portanto a economia não estaria em equilíbrio, o que contradiz a afirmação anterior.

Como veremos, em uma situação de equilíbrio não existe oportunidade de arbitragem.

II.2 - Descrição do Modelo

Os elementos do modelo são:

a) Uma data inicial *0* e uma data terminal *1*, sendo que na data *0* os indivíduos podem negociar títulos e consumir e na data *1* apenas consumir.

b) Os estados da natureza são descritos por um espaço amostral Ω com S elementos, ou seja:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s\}$$

A cada estado da natureza associamos um elemento ω_s. Os S conjuntos $\{\omega_s\}_{s=1}^{S}$ formam então uma partição f_T de Ω.. A probabilidade de ocorrência de cada estado ω_s é π_s..

Como veremos adiante a determinação dos preços dos ativos não dependerá da probabilidade de ocorrência dos estados ω_s. Os preços dos ativos dependerão das diversas probabilidades subjetivas dos indivíduos, que podem diferir da verdadeira distribuição de probabilidade associada aos eventos. Além disto, a medida de martingal equivalente não precisa ser igual à verdadeira distribuição de probabilidade, e em geral não é.

c) Existe um único bem de consumo perecível, não sendo possível estocá-lo para consumo no período seguinte. Desta forma, o único modo de se transferir renda de uma data para outra é através da compra e venda de títulos.

d) Existem N títulos disponíveis para negociação. No modelo descrito na introdução supôs-se que havia uma oferta exógena de títulos, e que esses títulos seriam liqüidados na data final. Aqui adotaremos uma forma alternativa: suporemos que a oferta total de títulos é nula, de tal forma que para cada contrato comprado devem existir contratos vendidos, de modo a ter oferta total nula. Ou seja temos "títulos endógenos". Além disto, supõe-se que os títulos sejam infinitamente divisíveis e que não existam custos de transação.

Assim como na introdução, os títulos são caracterizados pelo seu pagamento na data *1*, que dependerá do estado da natureza a ser verificado. Logo para $1 \leq j \leq N$, o pagamento do título j é definido pela variável aleatória y_j. Podemos então definir a matriz de pagamentos Y como:

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1N} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2N} \\ y_{s1} & y_{s2} & \cdots & y_{sN} \end{bmatrix}$$

e representar a variável aleatória discreta y_j pelo vetor:

$$y_j = [y_{j1}, y_{j2}, \ldots, y_{js}]$$

Na matriz Y cada linha representa um stado da natureza, e cada coluna um título. Portanto Y é uma matriz SxN.

Os preços dos ativos na data 0 são descritos pelo vetor:

$$p' = [p_1, p_2, \ldots, p_N]$$

Logo a matriz de retornos é definida por:

$$Z = \begin{bmatrix} \frac{y_{11}}{p_1} & \frac{y_{12}}{p_2} & \cdots & \frac{y_{1N}}{p_N} \\ \frac{y_{21}}{p_1} & \frac{y_{22}}{p_2} & \cdots & \frac{y_{2N}}{p_N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{y_{s1}}{p_1} & \frac{y_{s2}}{p_2} & \cdots & \frac{y_{sN}}{p_N} \end{bmatrix}$$

onde Z_S é o vetor de retornos dos N ativos no estado s, ou seja:

$$Z'_s = \left[\frac{y_{1s}}{p_1}, \frac{y_{2s}}{p_2}, \ldots, \frac{y_{Ns}}{p_N} \right]$$

O investidor escolherá certa quantidade de títulos representada pelo vetor:

$$n' = [n_1, n_2, \ldots, n_N]$$

e o total aplicado será $e_0 - c_0$.

e) Existem I indivíduos. Na data 0 os indivíduos sabem apenas qual é o conjunto de possíveis estados da natureza Ω, mas não sabem qual será o estado na data 1. Os consumidores agem competitivamente, tomando os preços como dados.

f) Cada consumidor i recebe uma dotação e_0^i do bem de consumo na data 0. Como os títulos são endógenos, não ocorre mais a liqüidação dos títulos, com o pagamento correspondente como no modelo descrito na introdução. Agora a soma dos contratos de todos os indivíduos é nula, logo também é nulo o total de pagamentos. Supõe-se então que o consumidor i receba uma dotação e_{1s}^i na data final, verificado o estado ω_s. Definimos então a dotação do indivíduo como[4]:

$$e = \{e_0, e_1\}$$

g) Os indivíduos consomem na data 0 e na data 1. Como a dotação e os retornos dos ativos são incertos, o consumo passa a depender do estado da natureza a ser verificado. Definimos então o consumo do indivíduo como[5]:

$$c = \{c_0, c_1\}$$

Então temos que o processo de consumo e de dotação podem ser considerados como vetores pertencentes ao espaço de consumo $X = R_+^{S+1}$..

h) Os consumidores têm preferências descritas por funções de utilidade estritamente crescentes, estritamente côncavas e diferenciáveis. Mais adiante esta hipótese será relaxada.

Temos então a definição:

Definição II.2.1: Uma economia $\mathcal{E} = \{u^i, e^i, Y\}$ é composta por I indivíduos, cada um com preferências descritas pela função utilidade u^i e com dotações e^i, e por N títulos caracterizados pela matriz de pagamentos Y.

---

[4] *Note que como temos S estados da natureza:*

$$e'_1 = [e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1S}]$$

[5] *Note que como temos S estados da natureza:*

$$c'_1 = [c_{11}, c_{12}, \dots, c_{1S}]$$

Portanto, a restrição orçamentária do agente i será:

$$c_0 + n^i.p \leq e_o^i$$
$$c_1 \leq Y.n^i + e_1^i$$

Outro modo de escrever a restrição orçamentária é através da normalização do vetor n. Neste caso, temos[6]:

$$x' = \left[\frac{n_1.p_1}{e_0 - c_0}, \frac{n_2.p_2}{e_0 - c_0}, \ldots, \frac{n_N.p_N}{e_0 - c_0} \right]$$
$$\Rightarrow x'.1 = 1 \ \text{ e } \ c_1 \leq Z.x.(e_0 - c_0) + e_1^i$$

e o vetor x representa o investimento em uma carteira, e é chamado de vetor de participação na carteira. Note que não existem restrições quanto ao sinal dos componentes do vetor x. Caso $x_j > 0$, o ativo foi comprado, caso $x_j < 0$ o ativo foi vendido a descoberto.

Por exemplo: uma carteira sem risco é uma carteira que oferece o mesmo retorno em todos os estados da natureza. Ou seja, uma carteira sem risco é a solução de:

$$Z.x = R1$$

onde R é o retorno sem risco e $r = R-1$ a taxa de juros sem risco.

Na realidade não existe título sem risco. Mesmo para títulos do tesouro americano, podem ocorrer guerras, o tesouro pode falir, e existe inflação (não antecipada). O rendimento neste caso deve sempre ser considerado em termos reais.

A restrição orçamentária do indivíduo i é $B(e^i, p)$, definida pelas equações acima. Temos então $c \in B(e^i, p)$ se e somente se $c - e^i \in B(0, p)$. Note que $B(0,p)$ é um subespaço vetorial de X, pois:

$$y \in B(0,p) \ \Rightarrow \ y_0 = n'.p \ \text{ e } \ y_1 = y.n$$

Portanto se $y \in B(0,p)$ e $x \in B(0,p)$ temos que $\alpha.x + \beta.y \in B(0,p)$.

[6]Onde 1 é o vetor: $1' = [1, 1, \ldots, 1]$.

O problema de cada indivíduo é então[7]:

$$\begin{aligned} &\max\ E[u^i(c_0, c_1)] \\ &\text{suj. a } c \in B(e^i, p) \end{aligned}$$

Onde a esperança é tomada relativamente à distribuição de probabilidade subjetiva do indivíduo i, que pode perfeitamente diferir da verdadeira distribuição de probabilidade.

O equilíbrio é alcançado quando a demanda agregada por cada ativo for nula, ou seja:

$$\sum_{i=1}^{I} n^i = 0,$$

Temos então a definição formal de equilíbrio:

<u>**Definição II.2.2**</u>: O equilíbrio na data *0* consiste de um vetor de preços ________, carteiras tais ____________ que para todo indivíduo o consumo gerado pela dotação e pela carteira n^i maximize a sua utilidade no conjunto $B(e^i, p)$ e o mercado esteja em equilíbrio, isto é,

$$\sum_{i=1}^{I} n^1 = 0.$$

O equilíbrio assim definido determina o processo de consumo $c^i = \{c_0^i, c_0^i\}, 1 \le i \le I$.

---

[7] *Lembre que* $c = \{c_0, c_1\}$.

II.3- Condição de Equilíbrio

Seja a distribuição de probabilidade subjetiva de cada indivíduo i dada por valores $\pi_s^i > 0$ associados a cada evento ω_s. Então o problema de maximização de cada indivíduo i é:

$$\max \sum_{s=1}^{S} \pi_s^i . u^i(c_0, c_{1s})$$

$$\text{suj. a} \quad \begin{array}{l} c_0 = e_0^i - n^i . p \\ c_1 = e_1^i + y.n^i \end{array}$$

As condições de equilíbrio são:

$$\sum_{s=1}^{S} \pi_s^i . \frac{\partial u^i}{\partial c_0} = \lambda_0$$

$$\pi_s^i . \frac{\partial u^i}{\partial c_{1s}} = \lambda_s$$

$$\lambda_0 . p = \sum_{s=1}^{S} \lambda_s . y_{1s}$$

Sendo $\lambda = \{\lambda_0, \lambda'\} = \{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_S\}$ os multiplicadores de Lagrange.

A última equação pode ser reescrita como:

$$\lambda_0 . p = \lambda' . Y$$

Eliminando λ obtemos:

$$\sum_{s=1}^{S} \frac{\pi_s^i \frac{\partial u^i}{\partial c_{1s}}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_s^i \frac{\partial u^i}{\partial c_0}} . y_{js} = p_j$$

para $j = 1, 2, \ldots, N$.

E obtemos assim a condição de equilíbrio:

$$Y'.\begin{bmatrix} \dfrac{\pi_1^j \frac{\partial u}{\partial c_{11}}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_s^j \frac{\partial u}{\partial c_0}} \\ \dfrac{\pi_2^j \frac{\partial u}{\partial c_{12}}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_s^j \frac{\partial u}{\partial c_0}} \\ \vdots \\ \dfrac{\pi_S^j \frac{\partial u}{\partial c_{1S}}}{\sum_{s=1}^{S} \pi_s^j \frac{\partial u}{\partial c_0}} \end{bmatrix} = p$$

Logo, dado um equilíbrio para a economia, existirá um vetor $\psi^* \in \Re^S$ tal que ele é solução do sistema $Y'.\psi = p$. O vetor ψ^* é chamado de vetor determinador de preços. Dado um título j, $1 \leq j \leq N$, seu pagamento é representado por y_j, e temos que seu preço é dado por:

$$P_j = y_j'.\psi^*$$

Estamos supondo indivíduos representados por utilidades estritamente crescentes, estritamente convexas e diferenciáveis. Podemos obter resultados semelhantes com hipóteses bem mais fracas.

II.4 - Eficiência de Pareto

Suponha agora que os indivíduos possuam preferências completas, contínuas, crescentes e convexas, e que cada preferência seja descrita por uma função de utilidade u^i contínua, crescente e quase-côncava.

Seja $c^i = \{c_0^i, c_1^i\}$ a solução da maximização do indivíduo i, para $1 \leq i \leq I$. Temos então as definições:

<u>Definição II.4.1</u>: Uma alocação $\{c^i\}$, onde $c^i = \{c^i, c^i\}$ é factível se e somente se $c^i \in B(e^i, p)$ e:

$$\sum_{i=1}^{I} c_0^i = \sum_{i=1}^{I} e_0^i \quad \text{e}$$

$$\sum_{i=1}^{I} c_1^i = \sum_{i=1}^{I} e_1^i$$

<u>Definição II.4.2</u>: Uma alocação factível $\{c^i\}$ é eficiente no sentido de Pareto se e somente se não existe outra alocação $\{b^i\}$ tal que todo indivíduo i prefira estritamente b^i a c^i..

Dada uma economia $\mathcal{E}$ com S estados e N títulos, não se pode garantir a priori que toda alocação seja alcançável. É conveniente definir o que vem a ser alocação alcançável de modo que a definição não dependa de c_0:

<u>Definição II.4.3</u>: Um consumo $c^i = \{c^i, c^i\}$ é alcançável a preços _____ em uma economia $\mathcal{E}$ se e somente se existir um processo de dotações $e = \{e_0, e_1\}$ tal que $e_1 = 0$ e $c \in B(e, p)$. O conjunto de processos alcançáveis é designado por $\mathcal{M}$.

Logo $c^i = \{c_0^i, c_1^i\}$ é alcançável se existir _________ tal que:

$$c_0^i - e_0^i = n^i . p$$
$$c_1^i = Y . n^i + e_1^i$$

Podemos então enunciar um teorema relacionando processos de consumo alcançáveis a alocações eficientes no sentido de Pareto, mas antes precisamos de uma definição e de um teorema:

__Definição II.4.4__: Uma arbitragem é uma carteira que dá a um indivíduo com dotação nula um processo de consumo não negativo e não nulo, ou seja, é uma carteira n tal que:

$$n.p \leq 0 \quad \text{e} \quad Y.n \geq 0$$

sendo que apenas uma das restrições acima se verifica com o sinal de igualdade[8].

__Teorema II.4.1__: Uma economia $\mathcal{E}$ com indivíduos com preferências completas, contínuas, crescentes e convexas está em equilíbrio se e somente se não existe carteira de arbitragem.

__dem.__: Suponha que exista equilíbrio, e seja n^i a carteira do indivíduo i e suponha que exista uma carteira de arbitragem do primeiro ou do segundo tipo n^*. Então $n^i + n^*$ é uma carteira que gera uma alocação de consumo que nunca é inferior à alocação de equilíbrio original e que ou é superior a esta alocação na data *0* (se n^* for do segundo tipo) ou é superior em algum estado na data *1* (se n for do primeiro tipo). Esta alocação está em *B(e,p)* e como a preferência é crescente, o indivíduo a prefere estritamente à alocação de consumo original, contradizendo a hipótese de que existe equilíbrio.

Finalmente podemos enunciar o teorema:

__Teorema II.4.2__: Se todo consumo é alcançável para qualquer sistema de preços p, então toda alocação de equilíbrio é eficiente no sentido de Pareto.

__dem.__: Suponha que $\{c^i\}$ seja uma alocação de equilíbrio e que $\{c^i\}$ não seja eficiente no sentido de Pareto. Então existe uma alocação factível $\{b^i\}$ tal que todo indivíduo prefere b^i a c^i. Logo o consumo $a^i = b^i - e^i$ é alcançável e então existem estratégias n^i e números reais α^i tais que para todo indivíduo i:

---

[8]Para a segunda equação isto significa que:

$$[y_{1s}, y_{2s}, \ldots, y_{Ns}].n > 0 \text{ para algum } \omega_s \in \Omega.$$

$$a_0^i = \alpha^i - n^i.p \qquad (1)$$
$$a_1^i = Y.n^i \qquad (2)$$

Como $\{b^i\}$ é factível temos:

$$\sum_{i=1}^{I} a_1^i = 0$$

Somando sobre i na equação (1):

$$\sum_{i=1}^{I} a_1^i = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{N} n_j^i.Y_j = \sum_{j=1}^{N} (\sum_{i=1}^{I} n_n^i).Y_j;$$

Isto implica em:

$$\sum_{n=1}^{N} (\sum_{j=1}^{I} n_j^i).p_j = 0 \qquad (3)$$

porque senão teremos uma oportunidade de arbitragem, o que contraria a hipótese de $\{b^i\}$ ser alocação de equilíbrio. Concluímos, então, que o processo de consumo $\{b_0^i - \alpha^i, b_1^i(T)\} \in B(e^i, p)$.

Se $\alpha^i \leq 0$ então o indivíduo prefere $\{b_0^i - \alpha^i, b_1^i\}$ a b^i, e portanto o prefere a c^i, contrariando a optimalidade de c .

Logo $\alpha^i > 0, \forall i$. Mas somando as equações (1) em i e usando a equação (3) obtemos:

$$\sum_{i=1}^{I} b_0^i = \sum_{i=1}^{I} e_0^i + \sum_{i=1}^{I} \alpha^i$$

e isto contradiz o fato de $\{b^i\}$ ser factível.

O teorema acima impõe condições nas carteiras dos indivíduos, que são elementos endógenos no modelo. É possível impor condições sobre os elementos exógenos do modelo de modo a garantir eficiência de Pareto. Ou seja:

<u>Teorema II.4.3</u>: Se posto *(Y)=S*, então todo consumo é alcançável para todo sistema de preços p e conseqüentemente toda alocação de consumo é eficiente no sentido de Pareto. <u>dem.</u>: Um consumo c é alcançável se e somente se:

$$Y.n = c$$

tem uma solução n^*. Mas se (Y) tem posto S esta solução existirá.

Quando o posto $(Y)=S$ temos que todo consumo é alcançável. Seja então ϑ um conjunto de S ativos tais que seus pagamentos Y_j formem um conjunto linearmente independente. Então dado certo ativo caracterizado por seu pagamento Y^*, basta considerar Y^* como sendo um consumo tal que:

$$-p^* = c_0$$
$$Y^* = c_1$$

Como $c = \{c_0, c_1\}$ é alcançável temos que este título pode ser duplicado através de uma carteira composta por títulos em ϑ. Ou seja, sendo esta carteira n^*, teremos:

$$p^* = n^*.p$$
$$y^* = Y.n^*$$

Caso as equações acima não se verifiquem, é fácil ver que existirá uma oportunidade de arbitragem.

Esta situação merece uma definição:

Definição II.4.5: Um mercado é completo se e somente se todo consumo é alcançável.

Podemos então enunciar os teoremas anteriores de outra forma:

Teorema II.4.4: Se o mercado é completo, então toda alocação de equilíbrio é eficiente no sentido de Pareto.

Teorema II.4.5: O mercado é completo se e somente se ocorrer posto $(Y)=S$.

II.5 - Medida de Martingal Equivalente em Mercados Completos

Vamos agora analisar a existência e a unicidade da medida de martingal equivalente no caso de termos um mercado completo. Suponha que exista um título sem risco. Sem perda de generalidade, suponha que o título sem risco seja o título $j=1$. Defina a taxa de juros como:

$$1+r=[\tfrac{y_1}{p_1}]$$

Então, como visto anteriormente, se as utilidades forem estritamente crescentes, estritamente convexas e diferenciaveis, teremos a condição de equilíbrio obtida em II.2. Pelo mesmo procedimento adotado na introdução, temos:

$$Y'.\begin{bmatrix} \dfrac{\pi_1^j \frac{\partial u}{\partial x_{11}}}{\sum_{s=1}^{S}\pi_s^j \frac{\partial u}{\partial x_0}} \dfrac{y_{11}}{p_1} \\ \dfrac{\pi_2^j \frac{\partial u}{\partial x_{12}}}{\sum_{s=1}^{S}\pi_s^j \frac{\partial u}{\partial x_0}} \dfrac{y_{12}}{p_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\pi_S^j \frac{\partial u}{\partial x_{1S}}}{\sum_{s=1}^{S}\pi_s^j \frac{\partial u}{\partial x_0}} \dfrac{y_{1S}}{p_1} \end{bmatrix} = (1+r).p$$

E assim definimos a medida de martingal equivalente como:

$$\pi^*(\omega_s)=\frac{\pi_s^j \frac{\partial u}{\partial x_{1s}}}{\sum_{s=1}^{S}\pi_s^j \frac{\partial u}{\partial x_0}} \frac{y_{1s}}{p_1}$$

Logo $\pi^*(\omega_s)>0$ e da primeira linha do sistema acima:

$$\sum_{s=1}^{S}\pi^*(\omega_s)=1$$

Sendo o mercado completo, temos posto $(Y)=S$, de modo que a solução do sistema acima é única. Portanto dado qualquer probabilidade subjetiva π^i e alocação de consumo c^i de certo indivíduo i, teremos sempre o mesmo vetor determinador de preços. Isto implica em igualdade entre as taxas marginais de substituição dos indivíduos, uma condição para eficiência no sentido de Pareto (supondo indivíduos com funções de utilidade diferenciáveis).

Suponha agora que tenhamos os indivíduos representados por preferências completas, contínuas, crescentes e convexas. Então dado o sistema de preços de equilíbrio p temos o sistema:

$$Y'.Q = p$$

Como o mercado é completo, temos posto $(Y)=S$ e dado p o sistema sempre terá solução e esta solução será única. Temos então a definição:

Definição II.5.1: Se para um sistema de preços p o sistema de equações:

$$Y'.Q = (1+r).p$$

tem uma solução positiva $Q(\omega_1) > 0,\ Q(\omega_2) > 0, \dots,\ Q(\omega_s) > 0$, então esta solução é chamada de uma medida de martingal equivalente.

Como o ativo 1 é o título sem risco, temos que a primeira equação equivale a $\sum_{s=1}^{S} Q(\omega_s) = 1$. Se $Q(\omega) > 0,\ \forall \omega$, então Q é uma medida de probabilidade em Ω. Falta mostrar em que circunstâncias isto ocorrerá. Seja então o teorema:

Teorema II.5.1: Uma medida de martingal equivalente Q existe se e somente se o sistema de preços p não admite oportunidades de arbitragem do primeiro ou do segundo tipo. dem.: $(\Rightarrow)$ Suponha que o sistema

$$Y'.Q = (1+r).p$$

possua uma solução positiva Q. Multiplicando a equação acima por n temos:

$$n'.Y'.Q = (1+r).n'.p$$

Então para qualquer estratégia n tal que os elementos de $n'.Y'$ sejam não negativos, o custo inicial $n'.p$ é também não negativo pois por hipótese a medida de martingal equivalente existe. Adicionalmente, se algum elemento de $n'.Y'$ é positivo, então $n'.p$ é também positivo, logo não existe oportunidade de arbitragem.

($\Leftarrow$) Suponha que o sistema de preços p não permita oportunidade de arbitragem do primeiro ou do segundo tipo. Considere então o subespaço vetorial $B(0,p)$ de x e seja H o conjunto dos vetores $x \in X$ alcançáveis ou não, tais que :

(i) O processo de consumo c é não negativo, isto é,

$$c_0 \geq 0 \text{ e } c_1 \geq 0$$

(ii) O processo de consumo c satisfaz

$$c_0 + \sum_{s=1}^{S} c_{1s} \geq 1$$

Temos que $B(0,p)$ é um subespaço vetorial de X, e que H é um subespaço vetorial de X não vazio, convexo e fechado. Além disso, $B(0,p) \cap H = \{\varnothing\}$, senão haveria oportunidade de arbitragem. Logo, existe um funcional linear f:XR tal que $f(c) = 0,\ \forall c \in B(0,p)$ e $f(c) > 0,\ \forall c \in H$.

Seja $u_0, u_1, \ldots, u_s$ a base ortonormal de X. Então qualquer processo de consumo $c = \{c_1, c_1\}$ tem a representação:

$$c = c_0.u_0 + \sum_{s=1}^{S} c_{1s}.u_s$$

como f é um funcional linear:

$$f(c) = c_0.f(u_0) + \sum_{s=1}^{S} c_{1s}.f(u_s)$$

como $u_s \in H,\ \forall s,$ temos $f(u_s) > 0$. Também temos que para todo n, o processo $\{-p_n, y_{ns}\} \in B(0,p)$ e então:

$$f(\{-p_n, y_n\}) = -p_n . f(u_0) + \sum_{s=1}^{S} y_{ns} . f(u_s) = 0$$

Definindo

$$Q(\{\omega_s\}) = (1+r).\frac{f(u_s)}{f(u_0)} \qquad s = 1,\dots,S$$

Obtemos:

$$Y'.Q = (1+r).p$$

o que completa a demonstração.

Logo concluímos que no caso de termos mercados completos com um título sem risco o equilíbrio é eficiente no sentido de Pareto, toda alocação de consumo é alcançável e a medida de martingal equivalente existe e é única.

Um título pode ter seu preço determinado sem ambigüidade em um mercado completo se e somente se o título é redundante neste mercado, ou seja, se seu pagamento pode ser reproduzido por uma carteira composta pelos títulos disponíveis para negociação. Todas as fórmulas de determinação de preços de ativos que independem das preferências e dotações dos agentes assumem que o ativo a ter seu preço determinado é alcançável, logo redundante neste mercado.

Dado qualquer ativo, caracterizado por seu pagamento y, temos que o seu preço será determinado por:

$$p = \frac{1}{(1+r)}.y'.Q$$

dependendo assim da utilidade dos agentes.

Contudo, suponha que o mercado seja completo e que existam mais títulos do que estados da natureza, ou seja, $N > S$. Fixe um conjunto $\mathcal{J}$ de S títulos linearmente independentes. Então para qualquer ativo que não pertença a $\mathcal{J}$, seja ele o ativo caracterizado pelo pagamento y_{S+1}, teremos:

$$Y_{S+1} = \sum_{s=1}^{S} \alpha_s . y_s$$

Logo o seu preço será dado por:

$$p_{S+1} = \sum_{s=1}^{S} \alpha_s . p_s$$

e dependerá apenas dos preços dos ativos em $\mathcal{J}$, tomados como dados.

As conclusões acima independem da existência de um título sem risco. Isto porque dado um conjunto qualquer $\mathcal{C}$ de S ativos linearmente independentes, podemos sempre obter o título sem risco. Seja $y_j, 1 \leq j \leq S$ o pagamento do título j em $\mathcal{C}$. Então o título sem risco tem como pagamento $y_s = A > 0, \forall \omega \in \Omega$, e assim podemos achar $\beta_s, s = 1, 2, \ldots, S$ tal que:

$$A.(1,1,\ldots,1)' = y = \sum_{s=1}^{S} \beta_s, y_s$$

Logo uma carteira com β_s unidades de cada título j corresponderá ao título sem risco.

Os resultados acima podem ser extendidos facilmente para o caso de termos mercados incompletos.

II.6 - Dominância e Arbitragem

Uma carteira representada pelo vetor de participação na carteira x domina outra y, quando:

$$Z.x \geq Z.y$$

(onde $\geq$ significa que a desigualdade é estrita para pelo menos 1 elemento). Como em qualquer estado da natureza a carteira dominante supera a dominada, todo investidor evitará adquirir a carteira dominada.

O problema da existência de uma carteira dominante é que nesta situação nenhum investidor terá uma carteira ótima que seja limitada. Por exemplo, suponha que x_1 domina x_2 e que o investidor deseja obter inicialmente a carteira x^*. Entretanto, $x^* + \gamma.(x_1 - x_2)$, com $\gamma > 0$, é factível e domina x^*, pois:

$$Z.[x^* + \gamma.(x_1 - x_2)] = Z.x^* + \gamma.Z.(x_1 - x_2) > Z.x^*$$
$$\text{e } 1'.[x^* + \gamma.(x_1 - x_2)] = 1'.x^* + \gamma.(1'.x_1 - 1'.x_2) = 1 + 0 = 1$$

o retorno da carteira é ilimitado, pois se $\gamma_2 > \gamma_1 > 0$ então $x^* + \gamma_2.(x_1 - x_2)$ domina $x^* + \gamma_1.(x_1 - x_2)$.

Conclui-se que a situação acima foi gerada pela possibilidade do investidor montar uma carteira comprando a carteira dominante e vendendo a descoberto a dominada (operação que qualquer investidor racional desejaria repetir infinitas vezes).

II.7 - Lei do Preço Único nos Mercados

O teorema de inexistência de arbitragem não deve ser confundido com a proposição que veio a ser conhecida por lei do preço único nos mercados. A proposição afirma que dois investimentos com o mesmo valor final em todo estado têm que ter o mesmo preço no período inicial. Ou seja:

Teorema II.7.1: Suponha que se tenha duas carteiras x_1 e x_2 tais que $Y.x_1 = Y.x_2$ (ou seja, elas têm o mesmo valor em todo estado da natureza). Neste caso, tem-se que:

$$p'.x_1 = p'.x_2$$

dem.: Monte a carteira y comprando a carteira x_1 e vendendo a x_2. Logo, $y = x_1 - x_2$. Podemos então reescrever a equação $Y.x_1 = Y.x_2$ como:

$$Y.y = 0 \quad \Rightarrow \quad p'.y = 0$$

chamando de D_p a matriz diagonal tal que $D_p.1 = p$:

$$(Y.D_p^{-1}).(D_p.y) = Z.(D_p.y) = 0$$
$$\Rightarrow \quad (p'.D_p^{-1}).(D_p.y) = 1'.(D_p.y) = 0$$

Mas qualquer violação da equação acima garante a existência de oportunidade de arbitragem.

Note que a lei do preço único nos mercados cobre apenas um subconjunto dos casos do teorema de existência de um vetor p; ela não cobre casos em que $Z.(D_p.y) \geq 0$.

O resultado do teorema é válido para carteiras, e obviamente pode ser aplicado a ativos. Neste caso, suponha existir dois ativos, o ativo i e o ativo j (com $1 < i < j < N$). O vetor de preços na data *0* é:

$$p' = (D_p.1)' = [p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots, p_j, \ldots, p_N]$$

Monte duas carteiras, uma com *1* unidade do ativo i, outra com *1* unidade do ativo j:

$$x'_1 = [0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0, \ldots, 0]$$

$$x'_2 = [0, 0, \ldots, 0, \ldots, 1, \ldots, 0]$$

Logo se $Y.x_1 = Y.x_2$ (ou $y_s^i = y_s^j$ para todo s) então $p'.x_1 = p'.x_2 \Rightarrow p_1 = p_2$.

Ou seja, ativos que têm o mesmo valor na data final para qualquer estado tem que ter o mesmo preço na data inicial.

III- MERCADO A TERMO

III.1- Introdução

Um indivíduo que compra uma posição de certo ativo ou mercadoria no mercado a termo se compromete a entregar uma certa quantidade pré-determinada K de moeda (ou seja, o preço K do ativo ou mercadoria no mercado a termo por ocasião da abertura da posição) em troca de uma unidade do ativo ou mercadoria em uma data pré-determinada, que é denominada data de vencimento do contrato a termo (maturity date) . O prazo do contrato é o período T transcorrido entre a data da compra e a data final.

Analogamente, um indivíduo que vende uma posição a termo se compromete a receber certa quantidade K de moeda e entregar uma unidade do ativo ou mercadoria por ocasião do vencimento do contrato a termo.

Cabe salientar que no contrato a termo não existe qualquer tipo de pagamento ou entrega do ativo ou mercadoria em questão nem na data de abertura da posição nem nos períodos subseqüentes. O pagamento por parte do comprador e a entrega da mercadoria por parte do vendedor ocorre somente no vencimento do contrato.

Existe apenas uma exceção à afirmação acima, que é a margem de garantia. A margem de garantia é um depósito feito pelo investidor na corretora que é utilizado como garantia pela corretora contra a inadimplência do investidor. Normalmente este depósito é fixado em 20% do valor da operação, sendo que a percentagem é maior para contratos a termo sobre títulos de menor liqüidez. Como a corretora paga juros de mercado sobre a margem de garantia, não a consideraremos doravante.

Temos inicialmente a proposição:

Proposição III.1.1: Se p é o preço do ativo, K é o preço a termo do ativo e r é a taxa de juros (suposta não estocástica) até o vencimento do contrato então $K = p.(1+r)$.

dem.: Suponha inicialmente $K < p(1+r)$. Faça então a seguinte arbitragem: compre 1 unidade do ativo arriscado pagando p, tome emprestado p e venda 1 contrato a termo.

No vencimento do contrato, entregue o ativo arriscado para saldar o compromisso no mercado a termo e pague o empréstimo. Temos então o seguinte fluxo de caixa:

Operação	t=0	Quant. Ativo	t=1
Venda do Contrato a Termo	-	-1	+K
Compra do Ativo	-p	+1	-
Empréstimo a Taxa r	$\frac{+p}{0}$	-	$\frac{-p(1+r)}{K-p(1+r)>0}$

Ou seja, da operação acima resulta um lucro de $K-p(1+r)>0$, ou, em outras palavras, temos uma oportunidade de arbitragem.

Suponha $K<p.(1+r)$. Faça agora a operação oposta e teremos novamente uma oportunidade de arbitragem.

Logo, se existe arbitragem, tem que ocorrer $K=p.(1+r)$.

Contudo, deve-se ter sempre em mente a importância das hipóteses implícitas neste resultado, a saber:

(i) taxa de juros não estocástica;

(ii) taxa de aplicação de fundos igual à taxa de empréstimo;

(iii) ausência de qualquer custo de transação como corretagem e impostos.

No caso do item (ii), por exemplo, uma taxa de aplicação r_a inferior à de empréstimo r_e introduz um intervalo da forma:

$$p.(1+r_a)\leq K\leq p.(1+r_e)$$

Cabe ressaltar que para que a fórmula $K=p.(1+r)$ seja válida não é necessário que as hipóteses (i) a (iii) sejam válidas para todos os investidores. mas sim que sejam válidas para pelo menos um investidor (que esteja preparado para aproveitar as oportunidades de arbitragem que aparecerem).

III.2- Termo de moeda Estrangeira com Livre Movimentação de Capitais

O mercado a termo de moeda estrangeira é útil para exportadores e importadores, que podem eliminar riscos cambiais envolvidos nos contratos de exportação e importação. Por exemplo, suponha que uma montadora fechou um contrato de exportação de automóveis em marcos. Mas o marco pode se desvalorizar em relação ao dólar, e isto implicará em prejuízo para a montadora se seus custos de produção são fixos em dólar. Logo a montadora deve vender contratos a termo (com cada contrato correspondendo a 1 marco, expresso em dólares) de modo a anular os prejuízos de uma possível desvalorização (e conseqüentemente os lucros de uma possível valorização).

Então considere o mercado onde cada contrato a termo corresponde a 1 marco, expresso em dólares. Seja:

F = taxa de câmbio a termo (US$/D.M.)

E = taxa de câmbio hoje (US$/D.M.)

r = taxa de juros sobre aplicações em dólares

r = taxa de juros sobre aplicações em marcos

Agora o procedimento é um pouco diferente, pois pode-se aplicar os marcos na Alemanha, em títulos sem risco, ou seja, a mercadoria agora rende juros. Temos então:

<u>Proposição III.2.1</u>: Para o mercado a termo de moeda estrangeira com livre movimentação de capitais e taxas de juros não estocástica, tem-se:

$$\frac{F}{E} = \frac{1+r}{1+r^*}$$

<u>dem.</u>: Suponha inicialmente que $\frac{F}{E} > \frac{1+r}{1+r^*}$. Basta então vender 1 contrato a termo e tomar emprestado $\left(\frac{E}{1+r^*}\right)$dólares à taxa r, trocando no câmbio em $t = 0$ por $\left(\frac{E}{1+r^*}\right)$ marcos, e aplicar estes marcos à taxa r^* em títulos sem risco na Alemanha, recebendo na época do vencimento do contrato a termo 1 marco como resultado. No vencimento, o investidor recebe F dólares referente à venda do contrato a termo, entrega 1 marco (resultado da aplicação de $\frac{1}{1+r^*}$ marcos à taxa r^* em títulos sem risco) e paga o empréstimo inicial, agora no valor de $\left(\frac{E}{1+r^*}\right).(1+r) = E.\frac{1+r}{1+r^*}$ dólares, obtendo um lucro de: $F - E\left(\frac{1+r}{1+r^*}\right) > 0$.

Ou seja:

Operação	Periodo 0	D.M.	Período 1
Vende 1 D.M. a Termo	-	-1	+F
Empréstimo de US$ $\frac{E}{1+r^*}$	$\frac{E}{1+r^*}$	+1	$-E.\frac{1+r}{1+r^*}$
Compra de $\frac{1}{1+r^*}$ D.M. (e aplicação a taxa r^*)	$-\frac{E}{1+r^*}$	+1	-
	0		$F-E.\frac{1+r}{1+r^*}>0$

Suponha agora que $F < E.\dfrac{1+r}{1+r^*}$. Faça a operação oposta.

Como não deve existir arbitragem, tem-se:

$$F = E.\frac{1+r}{1+r^*}$$

Lembre que se supôs livre movimentação de capitais. No Brasil isto não é bem válido. Até pouco tempo atrás só se podia aplicar em moeda estrangeira (legalmente) comprando títulos do governo denominados em dólar, cuja correção era o valor máximo entre a correção cambial e a correção monetária (a chamada ORTN cambial). Além disso, novamente existe a hipótese de taxas de juros não-estocásticas, de taxas de aplicação de fundos igual a taxa de empréstimos, além de ausência de custos de transação.

Podemos então generalizar este resultado através da seguinte proposição:

<u>Proposição III.2.2</u>: Se p é o preço do ativo, K é o preço a termo do ativo, r é a taxa de juros (suposta não estocástica) e r^* é a taxa de juros sobre o ativo, então:

$$K = p.\frac{(1+r)}{(1+r^*)}$$

Note que r^* pode ser positivo, como no caso da proposição 2 ou negativo, como por exemplo no caso de existirem despesas com estocagem proporcionais ao valor do ativo. No próximo item consideraremos o caso da despesa com estocagem do ativo ser proporcional à quantidade do ativo, e não ao valor.

III.3- Contrato a termo de Mercadorias com Custo de Estocagem

Existem vários exemplos no Brasil de contratos a termo de mercadorias como:

(i) Café - No Brasil é o que tem maior liqüidez. Não estraga, é bom para estocar, mas na entrega tem que ter sua qualidade julgada por um juiz a ser escolhido pela Bolsa de Mercadorias, e isto pode implicar na perda de todo o estoque de café por ocasião da entrega.

(ii) Boi Gordo - Tem um alto custo de estocagem, e no Brasil tem alguma liqüidez.

(iii) Soja - Pode ser bem conservada e tem alguma liqüidez no Brasil

(iv) Trigo - Tem pouca liqüidez no brasil.

Sejam:

p = preço à vista da mercadoria

K = preço da mercadoria no mercado a termo

r = taxa de juros (não estocástica)

δ = custo nominal de estocagem por unidade de mercadoria, a ser pago no período final.

Temos então a seguinte proposição:

<u>Proposição III.3.1</u>: Para contrato a termo com custo de estocagem, tem-se:

$$\frac{K}{P} = (1+r) + \frac{\delta}{P}$$

<u>dem.</u>: Suponha inicialmente que $\frac{K}{P} = (1+r) + \frac{\delta}{P}$. Neste caso, é possível: vender 1 contrato a termo da mercadoria, recebendo no período 1 K unidades monetárias. Comprar 1 contrato da mercadoria no mercado à vista, utilizando para isto um empréstimo de P u.m., à taxa r. No período final, entregar a mercadoria, receber o dinheiro referente ao contrato a termo e pagar o empréstimo e o custo de estocagem. Ou seja, tem-se o fluxo de caixa:

Operação	Período 0		Período 1
Venda do Contrato a Termo	-	-1	+K
Empréstimo a Taxa r	+P	-	$-P.(1+r)$
Compra de Estoque(e posterior venda)	-P	+1	-
Economia no Custo de Estocagem	-	-	$\frac{-\delta}{-P.(1+r)-\delta+K>0}$

se não ocorre arbitragem: $K \leq P.(1+r)+\delta$.

Suponha agora que $P.(1+r)+\delta \geq K$ e que existam estoques. Basta fazer a operação inversa, notando que agora quem estocava deixa de pagar o custo de estocagem. O investidor vende seu estoque e compra um contrato a termo para repor o estoque. O fluxo de caixa é então:

Operação	Período 0		Período 1
Venda do Contrato a Termo	-	+1	-K
Empréstimo a Taxa r	-P	-	$P.(1+r)$
Compra de Estoque(e posterior venda)	+P	-1	-
Economia no Custo de Estocagem	-	-	$\frac{+\delta}{P.(1+r)+\delta-K>0}$

Logo, para não ocorrer ganho de arbitragem, deve-se ter: $P.(1+r)+\delta \leq K$. Conclui-se que $K = P.(1+r)+\delta$.

Note que o resultado depende da existência de estoques. Se não há estoque disponível, isto não pode ser garantido, e só se pode afirmar que: $K \leq P.(1+r)+\delta$.

Da mesma forma que no item anterior, podemos generalizar o resultado:

Proposição III.3.2: Se p é o preço do ativo, K o preço a termo do ativo, r a taxa de juros (suposta não estocástica) e δ o custo de estocagem (ou ganho) por unidade do ativo, então:

$$K = p.(1+r)+\delta$$

As proposições 3 e 5 explicam por que em certos mercados o preço a termo é superior ao preço a vista, ao passo que em outros o preço a termo é inferior.

IV- MERCADO FUTURO

IV.1 - Introdução

Um indivíduo que compra um contrato de certo ativo ou mercadoria no mercado futuro se compromete a aceitar um fluxo de caixa composto de duas partes: A primeira, chamada de ajuste diário de margem, é uma quantia a ser paga ou recebida diariamente, equivalente à diferença entre o preço de fechamento no dia de pagamento da margem e o preço no dia anterior do ativo no mercado futuro. A segunda parte é um pagamento equivalente ao preço do ativo ou mercadoria no mercado à vista no dia do vencimento do contrato. Como contrapartida, o indivíduo tem o direito de receber uma unidade do ativo ou mercadoria em questão na data de vencimento do contrato.

Analogamente, um indivíduo que vende um contrato no mercado futuro se compromete a aceitar o fluxo de caixa oposto ao descrito acima, e a entregar uma unidade do ativo ou mercadoria em questão na data de vencimento do contrato.

Ou seja, suponha que $F(t)$ seja o preço do ativo no mercado futuro na data t e que $P(t)$ seja o preço do ativo no mercado à vista na data t, e que o vencimento seja dois períodos adiante, quando os contratos devem ser liquidados (ou seja, temos as datas $t=0,1,2$).

Em primeiro lugar, temos um fato importante que é $F(2)=P(2)$, em outras palavras, o preço no mercado futuro deve ser igual ao preço no mercado à vista no vencimento. Isto porque se a igualdade não for obedecida existirá uma oportunidade de arbitragem.

Suponha agora dois investidores em pontas opostas, cada um com uma posição de n contratos. Neste caso, seus fluxos de caixa ser,o:

Operação	Período 0	Período 1
Preço Merc. Futuro		
F(0)	F(1)	F(2)=P(2)
Preço a Vista		
P(0)	P(1)	P(2)
Investidor 1 (vende *n* contratos):		
0	-n.[F(1)-F(0)]	-n.[F(2)-F(1)]+n.P(2)
Investidor 2 (compra *n* contratos):		
0	+n.[F(1)-F(0)]	+n.[F(2)-F(1)]-n.P(2)

Logo, no vencimento, o saldo total é:

Investidor 1:

Ajuste de Margem:	$-n.[F(1)-F(0)]-n.[F(2)-F(1)]$
Receita Final:	$n.P(2)$
Total:	$n.P(2)-n.[F(2)-F(0)]=n.F(0)$

Investidor 2:

Ajuste de Margem:	$-n.[F(1)-F(0)]+n.[F(2)-F(1)]$
Receita Final:	$-n.P(2)$
Total:	$-n.P(2)+n.[F(2)-F(0)]=-n.F(0)$

Observa-se então uma grande semelhança entre um contrato a termo e um contrato no mercado futuro, já que em ambos a receita final depende do preço vigente na data de abertura. Contudo, veremos adiante que as semelhanças enganam.

Deve-se notar que a expressão preço no mercado futuro não é muito correta, pois como vimos anteriormente não ocorre uma compra de certo bem ou ativo, mas sim a aceitação de um compromisso legal correspondente ao fluxo de caixa descrito acima, durante o período de vigência do contrato.

Uma posição no mercado futuro é o total de contratos comprados menos o total de contratos vendidos, ou seja, o saldo líquido dos contratos possuídos pelo investidor. Note que a obrigação de entregar ou receber o ativo no vencimento pode ser cancelada simplesmente abrindo uma posição oposta ao compromisso assumido.

Apesar de apenas uma pequena fração das posições no mercado futuro serem fechadas no vencimento (com a entrega do bem), com a grande maioria das posições sendo fechadas antes do vencimento, é a possibilidade de entrega que dá valor ao contrato, com os preços no mercado futuro e do mercado à vista coincidindo no vencimento.

Com relação à entrega, é uma regra geral que o vendedor sempre tem a opção de escolher o modo de entrega (se houver escolha entre tipos de ativos, local de entrega, etc.), de modo que o comprador não tenha possibilidade de "puxar" o mercado, explorando uma possível iliqüidez do mesmo.

Exemplo: Apesar das semelhanças, o mercado futuro difere fundamentalmente do mercado a termo pela existência de ajuste de margem. Para ilustrar o fato, vejamos como é determinado o preço F do ativo no mercado futuro em um modelo com 2 períodos.

Suponha uma economia em 2 períodos, sem custos de transação, e onde a taxa de juros seja não estocástica, sendo igual a $R_1 = 1 + r_1$ no periodo inicial, e de $R_2 = 1 + r_2$ no período final.

Vamos provar então que:

$$F(0) = P(0).R_1.R_2$$

Suponha que $F(0) > P(0).R_1.R_2$. Então faça a seguinte operação: Na data *0*, compre *1* unidade do ativo pagando o custo *P(0)* com um empréstimo até o período final a taxa de juros $R_1.R_2$. Ao mesmo tempo, venda $1/R_2$ unidades do ativo no mercado futuro. Na data intermediária, compre $1/R_2$ unidades do ativo no mercado futuro (fechando a posição anterior), pague (ou receba) o ajuste de margem de *F(1)-F(0)* tomando emprestado (ou aplicando) a taxa R_2 e venda *1* unidade do ativo no mercado futuro (abrindo nova posição). Na data final, entregue o ativo comprado no mercado à vista para liquidar a posição no mercado futuro, pagando (ou recebendo) o novo ajuste de margem de *F(2)-F(1)*, mais o pagamento final *F(2)*.

Logo temos o seguinte resultado:

	Resultado na Data 0	Quantidade	Resultado na Data 1	Quantidade	Resultado na Data 2
Compra a Vista	*-P(0)*	*+1*	-	*+1*	-
Venda no Merc.Fut.(Data 1)	-	$-1/R_2$	$-\frac{1}{R_2}.[F(1)-F(0)]$	-	
Aplic. do Ajuste de Margem	-	-	-	-	$-[F(1)-F(0)]$
Venda no Merc.Fut.(Data 2)	-	-	-	*+1*	$-[F(2)-F(1)]+F(2)$
Empréstimo	*+P(0)*	-	-	*-1*	$-P(0).R_1.R_2$
Total	*0*				$F(0)-P(0).R_1.R_2$

e caso $F(0) > P(0).R_1.R_2$ temos uma arbitragem.

Logo, para não ocorrer arbitragem devemos ter[9]:

$$F(0) \leq P(0).R_1.R_2$$

E podemos generalizar para o caso de *N* períodos:

$$F(0) \leq P(0).\prod_{k=1}^{N} R_k$$

O exemplo acima destaca a diferença principal entre mercado a termo e mercado futuro. A aplicação, na data *0*, da regra de bolso do mercado a termo de "posição igual e oposta" levaria a um resultado final de:

$$F(0) - P(0).R_1.R_2 - [R_2 - 1].[F(1) - F(0)]$$

Mas sendo *F(1)-F(0)* estocástico, conclui-se que isto jamais será uma arbitragem, podendo o procedimento acima gerar ganhos ou prejuízos. Contudo, se a taxa de juros for suficientemente baixa, tem-se $(R_2 - 1)$ próximo de zero, e o efeito do ajuste de margem pode ser desprezado.

Uma regra prática (aproximada) para a compra no mercado futuro é dada uma posição de N_v unidades do ativos no mercado à vista, vender N_F unidades no mercado futuro, de modo que seja satisfeita a equação:

$$N_v.P(t) = N_F.F(t)$$

O raciocínio é simples: para pequenas oscilações nos preços, as perdas no mercado à vista são compensadas pelos ganhos no mercado futuro e vice-versa. Neste caso, a posição deve ser ajustada continuamente, sempre que houver variações maiores nos preços.

Por exemplo, se um investidor comprou o ativo no mercado à vista e vendeu o ativo no mercado futuro e ocorreu $\frac{F(t+1)}{F(t)} > \frac{P(t+1)}{P(t)}$, pela regra acima, ele deveria aumentar sua posição no mercado à vista comprando o ativo. Note que não se deve ajustar a posição pelo mercado futuro. Neste caso, se o investidor fosse ajustar sua posição pelo mercado futuro ele deveria reduzir sua posição no mercado futuro, ou seja, comprar

[9] *Caso seja possível vender a descoberto no mercado a vista (existam estoques), teremos a igualdade.*

contratos no mercado futuro. Contudo, ele estaria comprando justamente quando o preço no mercado futuro aumentou, o que não seria conveniente, principalmente se a razão $\frac{F(t)}{P(t)}$ oscilar muito.

IV.2 - A Relação entre Preços no Mercado a Termo e no Mercado Futuro

Em primeiro lugar, um indivíduo que abre uma posição no mercado a termo se compromete a comprar o ativo em uma data pré-determinada pelo preço vigente na data que o contrato é iniciado. Na data de vencimento, portanto, o preço do contrato a termo deve ser o mesmo preço vigente no mercado à vista. Em nenhum momento ocorre pagamento, a não ser no vencimento[10].

O contrato no mercado futuro é semelhante, mas existe uma diferença importante. Um indivíduo que abre uma posição no mercado futuro se compromete a comprar o ativo no vencimento pelo preço vigente no mercado futuro na data que o contrato é iniciado. Da mesma forma, o preço do contrato no mercado futuro deve ser o mesmo preço vigente no mercado à vista no vencimento. Inicialmente, como no mercado a termo, não há pagamentos. Contudo, conforme o preço no mercado futuro mude com o tempo, o indivíduo favorecido pelo movimento dos preços deve receber integralmente do indivíduo perdedor uma quantia equivalente à variação do valor total da posição[11]. Como resultado, o pagamento final, no vencimento, é simplesmente o preço do ativo no mercado à vista neste momento. A diferença entre esta quantia e o valor inicial do contrato foi paga (ou recebida) em prestações durante a vida do contrato.

Logo o preço de equilíbrio do mercado a termo deve variar continuamente no tempo de modo que os contratos recém-criados tenham sempre um valor atual nulo quando eles são iniciados. No caso do mercado futuro, o preço também deve variar continuamente no tempo, mas só que de modo que o fluxo restante de pagamentos futuros descritos acima tenha um valor atual nulo. Portanto, com uma taxa de juros constante, os dois contratos são equivalentes e os preços no mercado a termo devem ser iguais aos preços no mercado futuro, como veremos, mas em geral (com taxa de juros estocástica) isto é não é verdadeiro.

Para comparar os preços nos dois mercados, vamos inicialmente enunciar e demonstrar alguns resultados, que são meras aplicações da lei do preço único (single price

---

[10] Não consideraremos a margem de garantia devido ao fato de serem acrescidos juros de mercado a mesma.

[11] Mais precisamente, o investidor deve deixar uma margem de garantia equivalente a uma certa percentagem da operação (que é fixada pela bolsa e depende da liqüidez do ativo no mercado a vista) e deve pagar (ou receber) sempre que o valor total depositado na corretora (equivalente à margem de garantia, os pagamentos e recebimentos efetuados mais os juros acumulados) for inferior (ou superior) a certos limites pré-estabelecidos. Para simplificar a exposição, não consideraremos estes detalhes

law of markets).

Proposição IV.2.1: O preço no mercado a termo *K(t)* de um contrato que vence na data *s* é o valor na data *t* de um contrato que pagará na data *s* a quantia:

$$\frac{P(s)}{B(t)}$$

onde *B(t)* é o preço na data *t* de um título sem risco que paga *1* na data *s*, $t \leq s$ (ou seja $B(t) = \frac{1}{R(t)}$, onde *R(t)* é a taxa de juros até a data *s*).

dem.: Considere a seguinte estratégia: compre *1/B(t)* contratos a termo e aplique *K(t)* em títulos com vencimento na data *s*. O investimento requer *K(t)*. Não há pagamentos intermediários e o pagamento final na data *s* é:

$$\frac{1}{B(t)}.[K(s)-K(t)]+\frac{K(t)}{B(t)}=\frac{K(s)}{B(t)}=\frac{P(s)}{B(t)}$$

onde o primeiro termo na esquerda é o resultado de operação no mercado a termo e o segundo o retorno de aplicação em títulos sem risco.

Proposição IV.2.2: O preço no mercado futuro *F(t)* é o valor na data *t* de um contrato que pagará na data *s* a quantia:

$$P(s).\prod_{k=t}^{s-1} R_k$$

onde R_k é a taxa de juros no período *k*.

dem.: considere a seguinte estratégia: na data *t*, aplique a quantia *F(t)* em títulos e reinvista continuamente o principal e os juros até a data *s*. A cada momento j, $j = t,\ t+1,\ldots,s-1$, abra uma posição de $\prod_{k=t}^{j} R_k$ contratos no mercado futuro e liquide-os no período seguinte, reinvestindo o resultado (ou tomando emprestado) até a data *s*. Logo o resultado final é:

$$F(t).\prod_{k=t}^{s-1} R_k + \sum_{j=t}^{s-1} \left(\prod_{k=t}^{j} R_k\right).[F(j+1)-F(j)].\left(\prod_{k=j+1}^{s-1} R_k\right) = F(s).\prod_{k=1}^{s-1} R_k = P(s).\prod_{k=1}^{s-1} R_k$$

Logo podemos considerar tanto o mercado a termo quanto o mercado futuro "ativos" que pagam um certo número de unidades do ativo ou mercadoria em questão na data de vencimento. Para o mercado a termo, este número é o retorno de um investimento em um título com vencimento na data s. Para o mercado futuro, é o retorno total de uma política de reinvestimento contínuo em títulos de um único período. Logo temos uma diferença importante entre os preços no mercado a termo e no mercado futuro: os últimos depender,o da correlação entre os preços a vista e as taxas de juros, ao passo que os preços no mercado a termo não.

Por exemplo: suponha que a taxa de juros seja estocástica e que o preço de certo ativo seja positivamente correlacionado com a taxa de juros. Neste caso, se a taxa de juros subir o preço do ativo aumentará. Logo para cada contrato comprado no mercado futuro, o investidor aplicará uma quantia maior referente ao ajuste diário de margem à uma taxa de juros mais alta. Da mesma forma, se os juros caírem, o decréscimo na aplicação da quantia referente ao ajuste diário de margem será financiado a uma taxa de juros menor, ao passo que o mercado a termo não é afetado. A conclusão é que neste caso o preço do ativo no mercado futuro deve ser superior ao preço do mesmo ativo no mercado a termo. Se o preço do ativo for negativamente correlacionado com a taxa de juros, então vale a recíproca.

É importante ter sempre em mente que caso a taxa de juros seja não estocástica não existe muita diferença entre o mercado a termo e o futuro: os preços são os mesmos, no mercado a termo faz-se uma única operação na data inicial, no mercado futuro ajusta-se a posição ao longo do tempo. Contudo, se a taxa de juros for estocástica, os mercados a termo e futuro ser,o bem diferentes: agora o preço no mercado a termo não será necessariamente igual ao preço no mercado futuro. O leitor deve lembrar sempre deste detalhe.

Caso a taxa de juros seja não estocástica:

Proposição IV.2.3: Se as taxas de juros são não-estocásticas, então $K(t)=F(t)$.
dem.: Se as taxas são não estocásticas, tem-se:

$$\frac{1}{B(t)} = \prod_{k=t}^{s-1} R_k \Rightarrow K(t) = F(t)$$

Se só resta um único período para o vencimento, então $1/B(t)$ sempre será igual a R_t. Consequentemente, não haverá diferença entre preço no mercado futuro e no mercado a termo em modelos com um único período.

Proposição IV.2.4: Se $P(s)$ é não estocástico, então $K(t)=F(t)=P(t)$.

dem.: Se $P(s)$ é não estocástico, então um investimento de $P(s)$ em títulos com vencimento na data t produz um pagamento na data s de $P(s)/B(t)$, logo $K(t)=P(s)$. Da mesma forma, um investimento de $P(s)$ com uma estratégia de rolar continuamente os contratos produz um pagamento na data s de $P(s).\prod_{k=1}^{s-1} R_k$, logo $F(t)=P(s)$.

IV.3 - O Papel das Expectativas

Costuma-se afirmar que o mercado futuro "sinaliza" o preço que prevalecerá no mercado à vista no vencimento. Em outras palavras, afirma-se que o preço atual no mercado futuro é igual ao valor esperado do preço do ativo no vencimento, dada toda a informação disponível, ou seja:

$$F(t) = E[P(s)|I_t]$$

A razão é que o preço no mercado futuro é o resultado das ações (ofertas e demandas) de agentes racionais, que atuam baseados em suas expectativas sobre o valor dos contratos. Se a maioria deles prevesse que o preço no mercado à vista estaria acima do preço atual no mercado futuro, eles imediatamente comprariam, aumentando o preço no mercado futuro (valendo a recíproca). Logo o único equilíbrio seria com o preço no mercado futuro igualando a expectativa dos agentes sobre o preço no mercado à vista no vencimento.

O argumento é razoável, mas inconsistente com a equação de determinação de preços por arbitragem discutida anteriormente. Se o preço no mercado é fixado por arbitragem, então ele não é a expectativa dos agentes sobre o preço do mercado à vista no vencimento (e as expectativas dos agentes não tem importância?). Da mesma forma, se o preço no mercado futuro é determinado por estas expectativas, então surgem possibilidades de arbitragem, e sabemos que neste caso não há equilíbrio.

O que ocorre é que o modelo de arbitragem é a explicação correta para a determinação dos preços no mercado futuro, pois como mencionado acima, se assim não fosse, não haveria equilíbrio (como demonstrado anteriormente). O problema do "enfoque de expectativas" é que ele não leva em consideração proteção e arbitragem. Suponha, por exemplo, que um indivíduo tenha uma posição arriscada, mas de retorno elevado. Se o "enfoque das expectativas" estivesse correto, o indivíduo poderia vender contratos futuros, e teria exatamente o mesmo retorno de antes. só que agora teria eliminado o risco. Mas neste caso a estratégia ofereceria retornos altos sem risco, e todos os agentes prefeririam os ativos mais arriscados posto que eles podem eliminar o risco. Enquanto o retorno do título for maior do que a taxa de juros sem risco, haveriam investidores querendo realizar este tipo de operação, aumentando o preço dos ativos mais arriscados e reduzindo seus respectivos preços no mercado futuro.

Logo o argumento é falso. A questão é que apesar da determinação dos preços ser feita pela equação de arbitragem, as expectativas afetam o equilíbrio ao atuarem sobre o preço no mercado à vista. Como o preço no mercado à vista para qualquer ativo depende da expectativa do mercado sobre qual será seu valor no futuro comparado com investimentos alternativos que podem ser feitos, o ativo tem seu preço determinado no mercado de modo que é esperado ganhar uma taxa de retorno compatível com risco assumido sobre qualquer horizonte de investimento, incluindo o período até o vencimento do contrato futuro. A questão é que a equação de arbitragem determina o preço no mercado futuro dado o atual preço no mercado à vista, ao passo que expectativas afetam a determinação dos preços no mercado à vista. Logo pode-se afirmar que as expectativas afetam o preço no mercado futuro, mas de uma forma indireta, através do preço no mercado à vista.

IV.4 - Mercado Futuro de BTN

O mercado futuro de BTN era um mercado que existia até pouco tempo atrás e que era muito útil para se procurar proteção contra os efeitos da inflação sobre certos ativos. O mercado negociava contratos sobre o valor da BTN e tinha o vencimento no primeiro dia útil do mês.

Para explicar como este mercado funcionava suponha, por exemplo, que um investidor decida depositar dinheiro em uma caderneta de poupança no último dia útil do mês. (ou que uma indústria realize uma venda no último dia do mês, cujo pagamento, com valor nominal fixo, será efetuado 30 dias depois). Neste caso, se a taxa de inflação do mês seguinte for maior do que a taxa de inflação do mês do depósito (que determina o índice de correção da poupança), o banco ganha, mas se ela for menor, o banco perde. Como proceder para eliminar este risco?

Suponha que o investidor depositou D cruzeiros, e seja $J=0,005$ o rendimento real da poupança (taxa de juros real mensal de 0,5%) e $B(i)$ a BTN vigente no mês i. Logo temos o esquema:

	Deposita ↓	Saca ↑	
Mês:	0	1	2
BTN:	B(0)	B(1)	B(2)

O fluxo de caixa da operação para o banco é:

$$+D \quad -\mathrm{D}.(1+\mathrm{j}).\frac{\mathrm{B}(1)}{\mathrm{B}(0)}$$

cuja taxa nominal de juros é:

$$1+r=\frac{D.(1+j).B(1)/B(0)}{D}$$

e cuja taxa real é (dividindo pela inflação $1+\pi=\frac{B(2)}{B(1)}$):

$$1+i=\frac{(1+J).B(1)/B(0)}{B(2)/B(1)}=(1+J).\frac{1+\pi_{-1}}{1+\pi}$$

Logo, se:

$$\pi_{-1}>\pi \Rightarrow i>J \Rightarrow \quad \text{o banco perde}$$
$$\pi_{-1}<\pi \Rightarrow i<J \Rightarrow \quad \text{o banco ganha}$$

Como evitar o risco de i ser diferente de J?

Basta vender n contratos no mercado futuro de BTN, assim que o depósito for efetuado. Neste caso, o fluxo de caixa do banco será (supondo que o banco aplique o dinheiro a uma taxa de juros real J'):

	Período 0	Período 1
Depósito	$+D$	$-D.(1+J).B(1)\,/\,B(0)$
Aplicação	$-D$	$+D.(1+J').(1+\pi) = +D.(1+J').B(2)\,/\,B(1)$
Mercado Futuro	-	$n.[B(f)-B(2)]$

onde $B(f)$ é o preço do contrato futuro de BTN na data do depósito.

ogo a receita total do banco é:

$$R = -D.(1+J).B(1)/B(0) + n.[B(f)-B(2)] + D.(1+J').B(2)/B(1)$$

ou seja:

$$R = D.(1+J).[-\tfrac{B(1)}{B(0)} + n.\tfrac{B(f)}{D.(1+J)}] + D.(1+J).\tfrac{B(2)}{B(1)}.[\tfrac{(1+J')}{(1+J)} - n.\tfrac{B(1)}{D.(1+J)}]$$

Todos os valores são conhecidos, exceto $B(2)$. Concluímos que para minimizar a variância de R devemos escolher (anulando assim o segundo termo):

$$n = \frac{D.(1+J')}{B(1)}$$

Ou seja, deve-se vender $n = \frac{D.(1+J')}{B(1)}$ contratos no mercado futuro.

IV.5 - Mercado Futuro: Dedução em um Modelo de Média-Variância

Outro procedimento para a determinação de preços no mercado futuro consiste em construir um modelo de equilíbrio competitivo, onde os agentes maximizam utilidades de Von Newmann-Morgenstern, tomando como dados os preços dos ativos. Os preços no mercado futuro e as posições dos agentes neste mercado formam um equilíbrio onde o total de contratos comprados no mercado futuro iguala o total de contratos vendidos. Em um modelo mais geral, poder-se-ia determinar conjuntamente todos os preços da economia, como preços no mercado à vista, futuro, termo e taxa de juros (preço do título sem risco), através do equilíbrio simultâneo entre as demandas e ofertas de cada ativo pelos agentes.

Neste caso, estaremos interessados em um caso particular, ou seja, um modelo de equilíbrio parcial para determinação apenas do preço no mercado futuro e onde os agentes possuem utilidades do tipo média-variância.

Um preço de equilíbrio no mercado futuro é, por definição, o preço no qual a demanda por contratos iguala a oferta de contratos. Como não existe uma oferta inicial de contratos, e como eles não podem ser produzidos como bens, a oferta total de contratos deve ser sempre nula. Logo, um preço de equilíbrio é um preço no qual a demanda agregada da economia é nula. É claro que as demandas individuais podem ser positivas (comprador) ou negativas (vendedor), mas elas devem somar zero em equilíbrio.

Suponha uma economia com dois agentes e com um único período, e seja $D_i(f_0)$ a demanda por contratos no mercado futuro do agente i, uma função do preço f_0 do ativo no mercado futuro na data inicial. Suponha adicionalmente que $D_i, i = 1,2$ seja uma função monótona decrescente de f_0, ou seja, que $D'_i(f_0) < 0$, que exista um f_0^1 tal que $D_1(f_0^1) > 0$ e $D_2(f_0^1) > 0$ e que exista um f_0^2 tal que $D_1(f_0^2) < 0$ e $D_2(f_0^2) < 0$. Neste caso, o preço de equilíbrio será f_0^*, sendo $f_0^1 < f_0^* < f_0^2$ e a demanda agregada D nula:

$$D(f_0^*) = D_1(f_0^*) + D_2(f_0^*) = 0$$

portanto, ter-se-á:

$$D_1(f_0^*) = -D_2(f_0^*)$$

Em um gráfico:

Suponha agora que existam I indivíduos, sendo que o indivíduo i, $1 \leq i \leq I$, possui preferências sobre o espaço de consumo representada por uma função de utilidade do tipo média-variância, dada por:

$$U^i(\mu, \sigma^2) = \mu - r^i.\sigma^2$$

onde:

r^i= coeficiente de aversão absoluta ao risco do indivíduo i

$1/r^i = \tau^i$= tolerância ao risco do indivíduo i

μ= média da renda do indivíduo na data final

σ= desvio padrão da renda do indivíduo na data final

O que significa o coeficiente r^i? Observe que para uma certa utilidade fixa U_0, podemos definir um caminho de iso-utilidade:

$$U(\mu,\sigma^2) = U_0$$

derivando implicitamente,

$$U_1.d\mu + U_2 d\sigma^2 = 0, \quad \text{onde} \quad \left| \begin{array}{l} U_1 = \frac{\partial U}{\partial \mu} > 0 \\ U_2 = \frac{\partial U}{\partial \sigma^2} < 0 \end{array} \right.$$

logo o prêmio que deve ser cobrado para trocar desvio padrão por média (trocar o duvidoso pelo certo) é:

$$d\mu = \frac{U_2}{U_1} d\sigma^2$$

ou:

$$d\mu = \frac{A}{2} d\sigma^2$$

definindo a aversão absoluta ao risco como:

$$A = -\frac{2U_2}{U_1}$$

Então temos uma interpretação para r :

$$r^i = \frac{A}{2}$$

Para descrever formalmente o modelo, suponha que exista apenas um periodo, sendo que na data inicial 0 as decismes dos agentes são tomadas e na data final a incerteza é verificada (observa-se a realização das variáveis aleatórias do modelo) e os agentes consomem suas rendas, que são compostas por uma dotação (que é uma variável aleatória) adicionada ao resultado da negociação no mercado futuro (que é função dos preços dos ativos no mercado futuro, que por sua vez também são variáveis aleatórias).

$\tilde{e}^i$ = dotação do indivíduo i (sua riqueza aleatória).

f_0 = preço no mercado futuro do ativo, na data 0.

$\tilde{f}_1$ = preço do ativo no mercado à vista (lembre que no vencimento o preço do ativo no mercado futuro é igual ao preço à vista).

n^i = número de contratos futuros comprados pelo indivíduo i.

Observe que $\tilde{e}^i$ e $\tilde{f}_1$ são variáveis aleatórias, ao passo que f_0 é conhecido na data 0. A riqueza aleatória do indivíduo pode ser imaginada, por exemplo, como $Q^i.P$ (onde Q é a quantidade do ativo possuída pelo indivíduo e P o preço no mercado à vista). Ou seja, o valor total do ativo no mercado à vista. Normalmente, tem-se Q^i determinístico e P estocástico, como no caso de um investidor que possui Q^i ações de certa empresa. Entretanto, podemos ter Q^i estocástico também, como no caso de um produtor de café, que ao procurar proteção no mercado ainda não sabe qual será o tamanho da próxima colheita.

Como o indivíduo compra n^i contratos no mercado futuro, sua renda passa a ser:

$$\tilde{R}^i = \tilde{e}^i + n^i.(\tilde{f}_1 - f_0)$$

e portanto, temos:

$$E[\tilde{R}^i] = E[\tilde{e}^i] + n^i.\{E[\tilde{f}_1] - f_0\}$$

$$\text{var}[\tilde{R}^i] = Var[\tilde{e}^i] + n^{i^2}.\text{var}[\tilde{f}_1] + 2n^i.\text{cov}[\tilde{e}^i, \tilde{f}_1]$$

logo o agente maximiza sua utilidade esperada:

$$\max_{n^i} V^i(n^i) = U^i(\tilde{R}^i(n^i)) = E[\tilde{R}^i] - r^i.\text{var}[\tilde{R}^i]$$

cuja condição de primeira ordem é:

$$\frac{\partial V(n^i)}{\partial n^i} = E[\tilde{f}_1] - f_0 - 2n^i r^i \operatorname{var}[\tilde{f}_1] - 2r^i \operatorname{cov}[\tilde{e}^i, \tilde{f}_1] = 0$$

logo temos que a demanda do agente i é:

$$D^i(f_0) = n^i = \frac{E[\tilde{f}_1] - f_0}{2r^i \operatorname{var}[\tilde{f}_1]} - \frac{\operatorname{cov}[\tilde{e}^i, \tilde{f}_1]}{\operatorname{var}[\tilde{f}_1]}$$

que pode ser interpretada como a soma de duas componentes:

(i) A demanda puramente especulativa, que depende da expectativa de lucros no mercado futuro $E[\tilde{f}_1] - f_0$, do coeficiente de aversão ao risco r^i e da variância do contrato. Note que esta é a demanda de agentes que não tem nenhum motivo para procurar proteção no mercado, ou seja, para aqueles que têm sua riqueza aleatória e não correlacionada com o mercado futuro (é a noção intuitiva de um especulador: aquele que só está interessado em ganhos, e não em proteção);

(ii) e a demanda por proteção, que depende da correlação entre a riqueza aleatória e o preço no mercado futuro, além da variância deste preço. Note que a demanda por proteção é a demanda de um investidor que tem aversão ao risco infinta, ou seja, de um investidor que tem utilidade $U(x) = -\operatorname{var}[x]$.

Para a determinação do equilíbrio, basta agregar as demandas dos agentes, e notar que a demanda total por contratos no mercado futuro deve ser nula:

$$\sum_{i=1}^{I} n^i = 0$$

ou seja:

$$\sum_{i=1}^{I} \left(\frac{E[\tilde{f}_1] - f_0}{2r^i \operatorname{var}[\tilde{f}_1]} - \frac{\operatorname{cov}[\tilde{e}^i, \tilde{f}_1]}{\operatorname{var}[\tilde{f}_1]} \right) = 0 \qquad (*)$$

definindo,

$$\tilde{e} = \sum_{i=1}^{I} \tilde{e}^i$$

$$\tau = \sum_{i=1}^{I} \tau^i = \sum_{i=1}^{I} \frac{1}{r^i} = \frac{1}{r}$$

obtém-se da equação (*):

$$\frac{E[\tilde{f}_1]-f_0}{2\,\mathrm{var}[\tilde{f}_1]}.\sum_{i=1}^{I}\frac{1}{r^i}=\frac{1}{\mathrm{var}[\tilde{f}_1]}.\sum_{i=1}^{I}\mathrm{cov}[\tilde{e}^i,\tilde{f}_1]$$

ou seja:

$$\frac{E[\tilde{f}_1]-f_0}{2\,\mathrm{var}[\tilde{f}_1]}.\,\tau=\frac{\mathrm{cov}[\tilde{e}^i,\tilde{f}_1]}{\mathrm{var}[\tilde{f}_1]}$$

logo:

$$f_0=E[\tilde{f}_1]-2.r.\mathrm{cov}[\tilde{e},\tilde{f}_1]$$

Ou seja, o preço na data inicial do ativo no mercado futuro é a esperança sobre o preço do ativo na data final mais um termo que depende da aversão conjunta ao risco e da covariância entre a riqueza dos agentes e o preço do ativo na data final.

Com relação ao papel das expectativas, podemos agora ver que a afirmativa, comum no mercado, de que o preço no mercado futuro "sinaliza" o preço que prevalecerá no mercado à vista no vencimento do contrato só é válida em condições muito especiais. Ou seja, só se tem

$$F(t)=E[P(s)|I_t]\Rightarrow f_0=E[\tilde{f}_1]$$

Se ocorrer

$$\mathrm{cov}[\tilde{e},\tilde{f}_1]=0 \quad \text{ou} \quad r=0$$

Portanto, como foi afirmado anteriormente, o preço no mercado futuro está ligado ao preço no mercado à vista, mas de uma forma indireta. Se por acaso subir a expectativa sobre o preço do ativo no futuro (ou seja, neste modelo, se $E[\tilde{f}_1]$ aumentar), então o preço do ativo no mercado futuro subirá (porque aumenta a demanda especulativa) e o preço no mercado à vista também aumentará (caso contrário existirá uma oportunidade de arbitragem).

Com relação à diferença $E[\tilde{f}_1]-f_0$, seu sinal dependerá do sinal de $\mathrm{cov}[\tilde{e},\tilde{f}_1]$. Em certos mercados, como o mercado de ações, é razoável que as ações subam em épocas de prosperidade, quando a riqueza da sociedade aumenta, e deve-se encontrar normalmente $E[\tilde{f}_1]-f_0>0$. Em outros mercados, como o mercado de ouro no Brasil, seu preço sobe quando aumenta a incerteza (quando o ouro sobe, normalmente a bolsa cai) e deve-se ter usualmente $E[\tilde{f}_1]-f_0<0$.

Suponha agora uma economia com I indivíduos e N ativos arriscados. Sejam os vetores:

$$f_0' = [f_0^1, f_0^2, \dots, f_0^N]$$
$$\tilde{f}_1' = [\tilde{f}_1^1, \tilde{f}_1^2, \dots, \tilde{f}_1^N]$$
$$n^{i'} = [n_1^i, n_2^i, \dots, n_N^i]$$

$$\text{cov}[\tilde{f}_1] = \begin{bmatrix} \text{cov}(\tilde{f}_1^1, \tilde{f}_1^1) & \text{cov}(\tilde{f}_1^1, \tilde{f}_1^2) & \dots & \text{cov}(\tilde{f}_1^1, \tilde{f}_1^N) \\ \text{cov}(\tilde{f}_1^2, \tilde{f}_1^1) & \text{cov}(\tilde{f}_1^2, \tilde{f}_1^2) & \dots & \text{cov}(\tilde{f}_1^2, \tilde{f}_1^N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{cov}(\tilde{f}_1^N, \tilde{f}_1^1) & \text{cov}(\tilde{f}_1^N, \tilde{f}_1^2) & \dots & \text{cov}(\tilde{f}_1^N, \tilde{f}_1^N) \end{bmatrix}$$

que é a matriz variância-covariância do vetor f.

Logo, para o agente i:

$$\tilde{R}^i = \tilde{e}^i + n^{i'}.(\tilde{f}_1 - f_0)$$

eo problema do agente é

$$\max_{n^i} V^i(n^i) = U^i(\tilde{R}^i(n^i))$$

ou seja:

$$\max_{n^i} E[\tilde{e}^i] + n^{i'}.E[\tilde{f}_1] - n^{i'}.f_0 - r^i\{\text{var}[\tilde{e}^i] +$$
$$+ n^{i'}.[\text{cov}[\tilde{f}_1].n^i] + 2.n^{i'}.\text{cov}[\tilde{e}^i, \tilde{f}_1]\}$$

onde

$$\text{cov}[\tilde{e}^i, \tilde{f}_1]' = \left[\text{cov}[\tilde{e}^i, \tilde{f}_1^1] \quad \text{cov}[\tilde{e}^1, \tilde{f}_1^2] \dots \quad \text{cov}[\tilde{e}^i, \tilde{f}_1^N]\right]$$

portanto temos a condição de primeira ordem:

$$grad\ V(n^i) = 0$$

ou seja, temos:

$$E[\tilde{f}_1] - f_0 - 2.r^i.\mathrm{cov}[\tilde{e}^i, \tilde{f}_1] - 2.r^i.\mathrm{cov}[\tilde{f}_1].n^i = 0$$

Note que como $\tilde{f}_1$, f_0 e n^i são vetores temos N equações. Logo:

$$n^1 = \frac{\left[\mathrm{cov}[\tilde{f}_1]\right]^{-1}\left[E[\tilde{f}_1] - f_0\right]}{2r^i} - \left[\mathrm{cov}[\tilde{f}_1]\right]^{-1}\left[\mathrm{cov}[\tilde{e}^i, \tilde{f}_1]\right]$$

e novamente, podemos separar a demanda do agente em um termo especulativo e um termo de proteção.

Somando as demandas de todos os agentes:

logo,

$$\sum_{i=1}^{I} n^1 = \left[\mathrm{cov}[\tilde{f}_1]\right]^{-1}\left[E[\tilde{f}_1] - f_0\right].\frac{\tau}{2} - \left[\mathrm{cov}[\tilde{f}_1]\right]^{-1}\left[\mathrm{cov}[\tilde{e}, \tilde{f}_1]\right] = 0$$

logo,

$$f_0 = E[\tilde{f}_1] - \frac{2\,\mathrm{cov}[\tilde{e}, \tilde{f}_1]}{T}$$

como no caso uni-dimensional.

IV.6 - Operando com Mercados Futuros

O mercado futuro é útil para investidores que buscam proteção para seus patrimônios (em particular, para suas carteiras de ativos ou estoques de mercadorias). A proteção (ou hedge) é obtida tomando-se uma posição no mercado futuro que compensa parte dos riscos associados a uma carteira de ativos e/ou mercadorias. A essência da proteção é a adoção de uma posição no mercado futuro que, na média, gera lucros quando o valor da carteira é mais baixo do que o esperado, e gera perdas quando o valor da carteira é mais alto do que o esperado. Neste caso, troca-se uma parte do retorno esperado por redução no risco (apesar de ser possível, em certos casos, maior ganho esperado e redução do risco simultaneamente).

Um bom exemplo de proteção é o caso da Vale do Rio Doce que em 82/86 tinha uma dívida alta em moeda estrangeira (a maior parte em dólar) e portanto uma desvalorização real do câmbio (acima do índice de correção do balanço) provocava vultosos prejuízos. Nesta época, certos investidores compravam Vale a vista, mas simultaneamente compravam contratos futuros de dólar. No caso de uma maxi, as perdas com a desvalorização da ação no mercado à vista seriam compensadas pelos ganhos no mercado futuro de dólar. Atualmente a própria empresa atua no mercado futuro de moedas tentando anular este risco.

Outro exemplo é a atuação do BACEN nos mercados futuros de títulos do tesouro Norte-Americano, de modo a compensar os efeitos de variações nas taxas de juros sobre o estoque de dívida externa. Provavelmente a dívida externa seria muito inferior ao valor atual se esses mercados existissem antes de 82 (e o BACEN os tivesse utilizado).

Para se analisar como se deve operar no mercado futuro de modo a proteger certa posição, suponha um indivíduo com Q unidades de um certo ativo cujo preço no mercado à vista na data t é p e cujo preço no mercado futuro na data t é f_t. O indivíduo quer maximizar sua utilidade (como no modelo anterior, de média-variância) k períodos adiante, ou seja, em $t+k$. Pode ser por exemplo, uma trading company que está preste a fechar na data t um contrato de exportação de soja, e deseja reduzir riscos na época da safra, em $t+k$ quando ela irá comprar a quantidade necessária de soja. Note que aqui existe uma diferença em relação ao caso do ítem IV.1. A data $t+k$ no caso não é necessariamente a data de vencimento do contrato, podendo ser qualquer data que antecede a data de vencimento (e neste caso não se pode afirmar que $f_{t+k} = P_{t+k}$), e o mercado futuro em questão não recisa necessariamente ser o mercado futuro do ativo (que pode existir mas ter baixa liqüidez ou até mesmo não existir), mas qualquer mercado futuro cujo preço tenha boa correlação com o preço do ativo.

A renda aleatória do indivíduo é:

$$\tilde{R} = \tilde{e}_{t+k} + n.(\tilde{f}_{t+k} - f_t) = Q.\tilde{P}_{t+k} + n.(\tilde{f}_{t+k} - f_t)$$

onde $\tilde{e}_t$ é a dotação do indivíduo na data t.

Logo, o problema do indivíduo é:

$$\max_{n} V)n) = U(Q.\tilde{p}_{t+k} + n.(\tilde{f}_{t+k} - f_t))$$

cuja solução (já calculada anteriormente) é:

$$n = \frac{E[\tilde{f}_{t+k}] - f_t}{2r \ \mathrm{var}[\tilde{f}_{t+k}]} - Q.\frac{\mathrm{cov}[\tilde{p}_{t+k}, \tilde{f}_{t+k}]}{\mathrm{var}[\tilde{f}_{t+k}]}$$

Contudo, o primeiro termo (demanda especulativa) é de difícil manipulação, dado que não podemos avaliar r, e que não se consegue uma avaliação razoável de $E[\tilde{f}_{t+k}]$. Como estamos interessados na questão da proteção de carteiras, concentraremos a atenção apenas no último termo (na demanda por hedge). Isto equivale a:

(i) Supor um agente com aversão ao risco infinita, ou seja, com função de utilidade $U(\tilde{x}) = -\mathrm{var}[\tilde{x}]$.

(ii) Utilizar uma estimativa ad-hoc para a esperança do preço no mercado futuro da forma $E[\tilde{f}_{t+k}] = f_t$.

Logo, temos:

$$n = -Q.\frac{\mathrm{cov}[\tilde{p}_{t+k}, \tilde{f}_{t+k}]}{\mathrm{var}[\tilde{f}_{t+k}]}$$

chamando de

$$\beta = \frac{\mathrm{cov}[\tilde{p}_{t+k}, \tilde{f}_{t+k}]}{\mathrm{var}[\tilde{f}_{t+k}]}$$

temos:

$$y = -\beta.Q$$

Sejam:

$$\tilde{F}_{t+1} = \tilde{f}_{t+1} - f_t$$
$$\tilde{P}_{t+1} = \tilde{p}_{t+1} - p_t$$

os incrementos de preços, e suponha que $\tilde{P}_{t+1}$ e $\tilde{F}_{t+1}$ satisfaçam as exigências usuais de mínimos quadrados. Logo:

$$\mathrm{var}[\tilde{f}_{t+K} - f_t] = \mathrm{var}[\tilde{F}_{t+1} + \tilde{F}_{t+2} + \ldots + \tilde{F}_{t+k}] = k^2\,\mathrm{var}[\tilde{F}_{t+1}]$$
$$\mathrm{cov}[\tilde{f}_{t+k} - f_t, \tilde{p}_{t+k} - p_t] = \mathrm{cov}[\tilde{F}_{t+1} + \ldots + \tilde{F}_{t+k} + \tilde{P}_{t+1} + \ldots + \tilde{P}_{t+k}]$$
$$= k^2.\mathrm{cov}[\tilde{F}_{t+1}, \tilde{P}_{t+1}]$$

logo:

$$\beta = \frac{\operatorname{cov}[\tilde{f}_{t+k} - f_t, \tilde{p}_{t+k} - p_t]}{\operatorname{var}[\tilde{f}_{t+k} - f_t]} = \frac{\operatorname{cov}[\tilde{F}_{t+1}, \tilde{P}_{t+1}]}{\operatorname{var}[\tilde{F}_{t+1}]}$$

e a posição será de $y = -\beta.Q$ contratos, e para determinar β basta realizar a regressão:

$$P_t = \alpha + \beta.F_t + \varepsilon_t$$

Podemos, por exemplo, utilizar dados diários para calcular estimativas semanais *(k=7)* ou mensais *(k=30)* para a variância e covariância. Contudo, as condições de OLS não são verificadas normalmente. Problemas como autocorrelação e heteroscedasticidade são comuns na regressão acima. Observa-se também que regressões que utilizam dados mais recentes (por exemplo, dados diários dos últimos 60 dias ao invés de dados mensais dos últimos 60 meses) são mais eficientes. Pode-se tentar contornar este problema levando em consideração heteroscedasticidade ou autocorrelação dos resíduos, utilizando-se métodos como mínimos quadrados generalizados (no caso de heterocedasticidade) ou Cochrane-Orcutt (para autocorrelação dos resíduos), ou ajustando a posição frequentemente (proteção dinâmica).

Em muitos contratos futuros, é mais razoável supor que a mudança relativa no preço satisfaz as condições de OLS do que supor que a mudança (absoluta) de preço satisfaz as condições de OLS. Neste caso, definimos:

$$\tilde{P}^G_{t+k} = \frac{\tilde{P}_{t+k}}{P_t} \quad \text{e} \quad \tilde{F}_{t+k} = \frac{\tilde{f}_{t+k}}{f_t}$$

Ou seja,

$$\tilde{p}_{t+k} = p_t.\tilde{P}^G_{t+k} \quad \text{e} \quad \tilde{f}_{t+k} = f_t.\tilde{F}^G_{t+k}$$

Portanto

$$\beta = \frac{\operatorname{cov}[\tilde{f}_{t+k} - f_t, \tilde{p}_{t+k} - p_t]}{\operatorname{var}[\tilde{f}_{t+k} - f_t]} = \frac{p_t}{f_t}.\frac{\operatorname{cov}[\tilde{F}^G_{t+k}, \tilde{P}^G_{t+k}]}{\operatorname{var}[\tilde{F}^G_{t+k}]} = \frac{p_t}{f_t}.\beta^G$$

e a posição no mercado futuro deve ser de:

$$y = -Q.\frac{p_t}{f_t}.\beta^G$$

Note que esta fórmula só vale para compromissos k períodos adiante. Ou seja, ao se estimar β^G devem ser usados dados com intervalos de tempo compatíveis com o compromisso no mercado à vista (para um compromisso que vence um mês adiante, devemos usar dados mensais). Isto porque não podemos mais supor que $\text{var}(\tilde{f}_{t+k} - f_t) = k^2.\text{var}[\tilde{F}_{t+1}]$.

Outra opção é supor que $\tilde{F}_t^G$ e $\tilde{P}_t^G$ têm distribuição log-normal, ou seja:

$$\tilde{X}_{t+k} = \log(\tilde{F}_{t+k}^G) \quad \text{e} \quad \tilde{Y}_{t+k} = \log(\tilde{P}_{t+k}^G)$$

são normalmente distribuídos.

Neste caso, temos que a posição ideal é

$$y = -Q.\frac{p_t}{f_t}.J.b^G$$

onde:

$$J = \exp\{E[Y_{t+k}] - E[X_{t+k}] + \left(\frac{\text{var}[Y_{t+k}] - \text{var}[X_{t+k}]}{2}\right)$$

$$b^G = \frac{\exp\{\text{cov}[X_{t+k}, Y_{t+k}]\} - 1}{\exp\{\text{var}[X_{t+k}]\} - 1}$$

e novamente, o coeficiente $\beta^G = J.b^G$ depende do intervalo de tempo, uma desvantagem em relação à hipótese de variação absoluta de preços obedecendo as condições de mínimos quadrados.

Logo, para obter a melhor estimativa para o coeficiente β, devemos optar pela hipótese que melhor se ajusta às condições de mínimos quadrados.

Em algumas situações, é necessário proteger certa posição no mercado à vista com posições em tipos diferentes de contratos futuros. Basta então utilizar os resultados obtidos no caso de termos N títulos:

$$n = -\left[\text{cov}[\tilde{f}_{t+k}]\right]^{-1}.\left[\text{cov}[\tilde{p}_{t+k}, \tilde{f}_{t+k}]\right].Q$$

chamando de $\beta = \left[\text{cov}[\tilde{f}_{t+k}]\right]^{-1}.\left[\text{cov}[\tilde{p}_{t+k}, \tilde{f}_{t+k}]\right]$

temos $n = -\beta.Q$

Neste caso, devemos estimar a posição em cada mercado utilizando uma regressão linear múltipla. Como temos N contratos diferentes, devemos utilizar a seguinte regressão (para o caso de diferenças de preços satisfazerem mínimos quadrados):

$$S_t = \alpha + \beta_1.F_t^{(1)} + \beta_2.F_t^{(2)} + \ldots + \beta_N.F_t^{(N)} + \varepsilon_t$$

onde $F_t^{(n)}$ é o incremento de preço no n-ésimo mercado futuro.

Como vimos anteriormente, a posição ideal é

$$n = -\beta.Q$$

sendo $\beta = \left[\text{cov}[\tilde{F}_{t+1}]\right]^{-1}.\left[\text{cov}[\tilde{P}_{t+1}, \tilde{F}_{t+1}]\right]$

com $\tilde{F}_t' = [\tilde{F}_t^{(1)}, \tilde{F}_t^{(2)}, \ldots, \tilde{F}_t^{(N)}]$

Sendo portanto β estimado pela regressão acima.

Apesar de óbvio, é sempre bom acrescentar que ao se proteger uma posição no mercado à vista devem ser utilizados apenas mercados futuros cuja correlação com o compromisso no mercado à vista seja bem explicada pela teoria econômica. Além do mais, devem ser utilizados apenas estimativas dos coeficientes que tenham significância estatística. Os demais devem ser rejeitados, observando-se que ao se rejeitar um coeficiente os demais devem ser reestimados. A qualidade da proteção pode ser prejudicada ao se incluir contratos futuros mal relacionados com o compromisso no mercado à vista (podemos <u>aumentar</u> o risco ao se incluir um mercado indevidamente). Bom senso e um bomentendimento do funcionamento do mercado é sempre útil no momento de se selecionar os mercados futuros a serem usados.

Outra questão importante é quando se tem diversas posições no mercado à vista (por exemplo, uma carteira de ações). Neste caso, é fácil demonstrar que a regra ótima é calcular o número de contratos ótimo para cada posição no mercado à vista e depois adicionar as diversas posições nos mercados futuros. Ou seja, vale a regra de aditividade para qualquer número de fontes de riscos, e para qualquer número de diferentes contratos futuros (fato que pode ser facilmente demonstrado pelo leitor).

IV.7 - Mercado Futuro de Hndice de Ações

O mercado futuro de índice é um instrumento muito útil para os investidores no mercado de ações. Para se ter uma idéia de sua flexibilidade, podemos dar alguns exemplos:

(i) Uma seguradora (ou um fundo de pensão) deseja aplicar em ações, pois assim obterá um retorno maior sobre seu patrimônio. Contudo, não quer assumir riscos altos, pois precisa pagar as indenizações sobre os sinistros (de acordo com seu cálculo atuarial). Neste caso a seguradora monta uma carteira de ações, vendendo contratos futuros de índices, de modo a reduzir a variância de sua posição.

(ii) Um investidor percebe que as medidas a serem tomadas pelo governo no próximo "pacote" ir,o prejudicar os bancos, o que implicará em perdas no próximo balanço. Contudo, ele não sabe quais serão as conseqüências do "pacote" sobre o mercado em geral. Por exemplo, uma redução nos juros (ou uma desindexação) pode implicar em uma alta no mercado de ações, e neste caso as ações de bancos teriam a influência de dois efeitos opostos. Vender a descoberto neste caso seria uma imprudência. A solução é: vender a descoberto ações de bancos, mas comprar contratos a futuros de índices. Neste caso, para que o investidor tenha lucro, basta que as ações de bancos subam menos que o mercado, ou que caiam mais do que o mercado. Aposta-se em uma variação de preços relativos. E se ele não puder vender ações a descoberto? Basta montar uma carteira bem correlacionada com o índice (suponha, para simplificar, que ele possa, sem incorrer em custos de transação, duplicar o índice) e que não contenha ações de bancos, e vender o índice no mercado futuro.

(iii) Um investidor, ao analisar movimentos de preços passados, observa que no ínicio de uma alta na bolsa, as ações de primeira linha sobem mais, possivelmente por terem mais liqüidez. Contudo, algum tempo depois, as ações de segunda linha é que passam a "puxar" a alta, provavelmente porque o movimento diário aumenta, dando mais liqüidez ao mercado. O investidor, acreditando que pode prever o comportamento futuro dos preços baseado no movimento de preços no passado, e achando razoável sua explicacão, resolve especular. Julgando estar no início de uma alta, compra o índice futuro do IBV (que contém em sua maior parte ações de primeira linha) e vende o índice futuro do BOVESPA (com maior participação de ações de segunda linha) se ele estiver certo, terá lucro.

Logo, o mercado futuro de índice é útil. Mas como usá-lo?

Suponha um investidor com uma carteira de ações, composta por Q_j ações da empresa j (com J ações, ou seja, $j=1,2,...,J$), sendo que a ação j é cotada na data t a $p_j(t)$. O investidor vende n contratos no mercado futuro ao preço $F(0)$. Qual o valor ideal de n?

O valor de sua posição na data t é:

$$C(t) = \sum_{j=1}^{J} Q_j . p_t(t) - n.(F(t) - F(0))$$

logo, o retorno da carteira em t é (considerado como a diferença de preços, ou seja, $R_c(t) = C(t) - C(0)$):

$$R_c(t) = \sum_{j=1}^{J} Q_j . R_j(t) - n.R_f(t)$$

sendo $R_f(t) = F(t) - F(0)$ e $R_j(t) = p_j(t) - p_j(0)$.

Logo a variância do retorno é:

$$Var[R_c(t)] = Var\left[\sum_{j=1}^{J} Q_j.R_j(t)\right] + n^2.Var[R_f(t)] - 2.n.Cov\left[\sum_{j=1}^{J} Q_j.R_j(t), R_f(t)\right]$$

e temos:

$$n^* = \frac{\text{cov}\left[\sum_{j=1}^{J} Q_j.R_j(t), R_f(t)\right]}{\text{var}[R_f(t)]}$$

ou seja:

$$n^* = \sum_{j=1}^{J} Q_j . \frac{\text{cov}[R_j(t), R_f(t)]}{\text{var}[R_f(t)]}$$

e para calcular n^*, basta achar a covariância de cada ação com o índice no mercado futuro separadamente.

É importante observar que a equação acima não tem nada a ver com o CAPM. O β do CAPM é a relação entre o retorno da ação e o retorno do índice de mercado (de uma carteira composta por todos os ativos do mercado, como ações, imóveis, títulos do governo, títulos privados, obras de arte, etc.), ao passo que aqui é a relação entre o retorno da ação e o retorno do índice no mercado futuro.

Logo, o investidor deve fazer a regressão:

$$R_j(t) = \alpha + \beta.R_f(t) + \varepsilon_t$$

para cada empresa da sua carteira, e depois calcular n^* de acordo com a quantidade de ações da empresa na carteira. Evidentemente, existe a hipótese implícita de que as hipóteses de mínimos quadrados ordinários sejam satisfeitas para a equação acima.

Poderíamos também ter definido R_π e R_f como a variação relativa, ao invés de absoluta, ou seja:

$$R_j(t) = \frac{P_j(t)}{P_j(t-1)} - 1, \qquad R_f(t) = \frac{F(t) - F(t-1)}{I(t-1)}$$

onde $I(t)$ é o valor do índice a vista. A melhor opção é aquela que melhor se ajusta às hipóteses de mínimos quadrados ordinários.

Apesar das semelhanças com os demais mercados, o mercado futuro de índice tem uma diferença importante. A diferença fundamental é que o índice é composto por várias ações (alguns índices têm até centenas de ações, como o S&P 500 (Standard and Poor's 500, com as 500 ações mais negociadas nos E.U.A.), ou o índice da N.Y.S.E. com as 1.500 empresas com ações negociadas na bolsa de valores de Nova Iorque, ou apenas algumas (como o IBV 12 da bolsa de valores do Rio), o que faz com que seja difícil realizar arbitragens, devido aos custos de transação e a falta de liqüidez de algumas ações que compõe o índice. Logo é comum ocorrerem grandes diferenças entre o preço teórico e o preço corrente do mercado futuro de índices. Ou seja, neste mercado devemos ter o diferencial $B(t)=F(t)-P(t)$ muito instável.

Observe que o retorno de uma carteira ao se operar no mercado futuro é:

$$R(t) = P(t) - P(0) - n.[F(t) - F(0)]$$

ou seja:

$$R(t) = (1-n).[P(t) - P(0)] - n.\{[F(t) - P(t)] - [F(0) - P(0)]\}$$

Logo podemos definir o retorno da carteira em termos do diferencial $B(t)=F(t)-P(t)$:

$$R(t) = (1-n).[P(t) - P(0)] - n.[B(t) - B(0)]$$

e portanto, o retorno total da carteira é uma combinação entre o retorno das ações e a mudança no diferencial. Então, podemos afirmar que procurar proteção no mercado futuro é trocar o risco de varações nos preços das ações por um risco potencialmente mais administrável, a variação no diferencial.

Concluimos que com um diferencial mais instável, teremos um menor n^*, e portanto uma menor capacidade do mercado futuro de fornecer proteção. Portanto é de se esperar que o mercado futuro de índice não ofereça boa proteção para períodos curtos, principalmente para contratos que estejam muito distantes do vencimento.

BIBLIOGRAFIA

Auler, Flávio - Modelos de Determinação de Preços de Ativos e a Medida de Martingal Equivalente - Dissertação Submetida à Congregação da Escola de Pós-Graduação em Economia da Fundação Getúlio Vargas para obtenção do Grau de Mestre em Economia - 1991.

Cox, John; Ingersoll Jr., Jonathan E.; Stephen, A. Ross - The Relation between Foward Prices and Futures Prices - Journal of Financial Economics nº 9 pag 321-346 - North Holland Publishing Company - 1981.

Dothan, Michael U. - Prices in Financial Markets - Oxford University Press - 1990.

Duffie, Darrell - Futures Markets - Prentice Hall - 1989.

Figlewski, Stephen - Hedging with Financial Futures for Institutional Investors: From Theory to Practice - Ballinger - 1986.

Huang, Chi-Fu and Litzenberger, Robert H. - Foundations for Financial Economics - North Holland Publishing Company - 1988.

Hull, John - Options, Futures, and Other Derivative Securities - Prentice Hall - 1989.

Ingersoll Jr., Jonathan E. - Theory of Financial Decision Making - Rowman & Littlefield Publishers - 1987.

Simonsen, Mário Henrique - Dinâmica Macroeconômica - Mc Graw-Hill do Brasil - 1983.

Werlang, Sérgio Ribeiro da Costa - Notas de Aula da Segunda Parte do Curso de Teoria das Decismes Financeiras II do Mestrado/Doutorado em Economia da Escola de Pós-Graduação em Economia da Fundação Getúlio Vargas - 1989.